

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Adam Azenić

Zagreb, 2014.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Hrvoje Jasak, dipl. ing.

Student:

Adam Azenić

Zagreb, 2014.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se profesoru Jasaku na pruženoj stručnoj pomći i podršci u razvoju vještina u računalnoj dinamici fluida. Posebno se zahvaljujem asistentu Vuki Vukčeviću na velikoj pomoći u izradi rada.

Hvala obojici.

Adam Azenić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum: 27-02-2014	Prilog
Klasa: 602-04/14-6/2	
Ur.broj: 15-1703-14-70	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Adam Azenić**

Mat. br.: 0035184635

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička simulacija povezanog numeričkog modela strujanja i akustičkog modela**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical simulation of acoustic response coupled with flow**

Opis zadatka:

Simulacija akustičkog signala koji se javlja kao posljedica strujanja fluida korištenjem trodimenzionalne metode numeričke mehanike fluida (CFD) zahtijeva neproporcionalno velike domene, rezoluciju proračunske mreže, veličinu vremenskog koraka, kao i točnost metode simulacije. Kako bismo ostvarili tehnički iskoristive rezultate simulacije, u ovom radu istražiti će se mogućnost kombiniranog pristupa simulaciji, gdje je strujanje fluida modelirano u stacionarnom ili tranzijentnom RANS pristupu koristeći CFD metode, a rezultati RANS simulacije korišteni su kao kvazi-stacionarno polje za numeričku akustičku simulaciju (CAA). Ispitat će se kombinacija stacionarnih ili tranzijentnih 2-D ili 3-D CFD simulacija s 3-D tranzijentnom CAA akustičkom simulacijom.

U radu je potrebno:

- napraviti pregled literature u području kombiniranih CFD/CAA simulacija kako bi se izabrale odgovarajuće geometrije, rubni uvjeti i eksperimentalno-numerički rezultati za usporedbu s rezultatima proračuna. Posebnu pažnju posvetiti geometriji 2-D akustičkog klina;
- izvršiti 2-D proračun laminarnog nestlačivog strujanja oko 2-D klina u stacionarnom i tranzijentnom proračunu; prebaciti rezultate na 3-D mrežu za CAA simulaciju;
- izvršiti 3-D CAA simulaciju sa stacionarnim CFD rezultatima i usporediti s literaturom;
- izvršiti kombiniranu 3-D CFD/CAA simulaciju strujanja oko klina i usporediti rezultate CAA simulacije s poznatim eksperimentalno-numeričkim rezultatima;
- izračunati tlačno opterećenje površine klina, podijeljeno po komponentama „tlaka strujanja“ i „akustičnog tlaka“;
- razmotriti način simulacije i važnost efekta stlačivosti fluida na rezultate.

Kako bi se zadovoljio zahtjev sponzora, rad i prezentaciju potrebno je napisati na engleskom jeziku.

U tekstu rada potrebno je navesti korištenu literaturu i eventualnu pomoć pri izradi rada.

Zadatak zadan:

11. studenog 2013.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Hrvoje Jasak

Rok predaje rada:

1. rok: 21. veljače 2014.

2. rok: 12. rujna 2014.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 3., 4. i 5. ožujka 2014.

2. rok: 22., 23. i 24. rujna 2014.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Igor Balen

SADRŽAJ

1	UVOD.....	1
2	MATEMATIČKE OSNOVE	3
2.1	Matematički model strujanja.....	3
2.2	Rubni uvjeti.....	5
2.3	Vremenski osrednjene Navier-Stokesove jednačbe	6
2.4	Modeli turbulencije	8
2.4.1	$k - \varepsilon$ model turbulencije.....	8
2.4.2	$k - \omega$ SST model turbulencije	10
2.5	Turbulentni granični sloj	11
2.6	Fourierova transformacija	13
2.7	Linearna akustična teorija	16
3	DISKRETIZACIJA JEDNADŽBI, IMPLEMENTACIJA RUBNIH UVJETA	18
3.1	Diskretizacija opće transportne jednačbe	18
3.1.1	Diskretizacija nestacionarnog člana.....	18
3.1.2	Diskretizacija ostalih članova	21
3.2	Implementacija rubnih uvjeta.....	21
4	OPIS GEOMETRIJE I RUBNIH UVJETA	22
4.1	Rubni uvjeti, svojstva fluida, postavke simulacije.....	23
5	PRIKAZ REZULTATA	27
5.1	Stacionarno rješenje	27
5.2	Nestacionarna rješenja	28
5.2.1	Usporedba rezultata laminarnih proračuna	35
5.2.2	Usporedba rezultata proračuna $k - \varepsilon$ modela turbulencije.....	36
5.2.3	Usporedba rezultata proračuna $k - \omega$ SST modela turbulencije	37
5.2.4	Usporedba rezultata proračuna na mreži s 35500 volumena	38
5.2.5	Usporedba rezultata proračuna na mreži s 92760 volumena	39
5.2.6	Usporedba rezultata proračuna na mreži s 189400 volumena	40
5.2.7	Rezultat dobiven linearnom akustičnom teorijom	42
6	ZAKLJUČAK.....	43
	LITERATURA.....	44

POPIS SLIKA

Slika 1.1 Primjer stvaranja vrtloga naizmjenično s obje strane klinastog objekta	2
Slika 2.1 Prve četiri aproksimacije pavokutnog vala pomoću Fourierovog reda	14
Slika 4.1 Domena proračuna s dimenzijama	22
Slika 4.2 Mreže koje se razlikuju u broju volumena i u prostornome rasporedu volumena	23
Slika 4.3 Prikaz rubnih uvjeta po granicama polja strujanja, više slučajeva rubnih uvjeta	24
Slika 4.4 Prikaz točaka promatranja tlakova	26
Slika 5.1 Stacionarno polje brzine	27
Slika 5.2 Nestacionarno polje brzine	27
Slika 5.3 Primjer osciliranja tlaka u više različitih točaka promatranja	28
Slika 5.4 Prikaz sila tlaka i viskoznih sila u vremenskoj domeni	29
Slika 5.5 Dijagrami signala sile i tlaka za odabrane točke u frekvencijskoj domeni (1. dio)	30
Slika 5.6 Dijagrami signala sile i tlaka za odabrane točke u frekvencijskoj domeni (2. dio)	31
Slika 5.7 Dijagrami signala sile i tlaka za odabrane točke u frekvencijskoj domeni (3. dio)	32
Slika 5.8 Dijagrami signala sile i tlaka za odabrane točke u frekvencijskoj domeni (4. dio)	33
Slika 5.9 Usporeba rezultata laminarnih proračuna	35
Slika 5.10 Usporedba rezultata proračuna s $k - \varepsilon$ modelom turbulencije	36
Slika 5.11 Usporedba rezultata $k - \omega$ SST modela tubulencije	37
Slika 5.12 Usporedba rezultata proračuna na mreži s 35500 kontrolnih volumena	38
Slika 5.13 Usporedba rezultata proračuna na mreži s 92760 kontrolnih volumena	39
Slika 5.14 Usporedba rezultata proračuna na mreži s 189400 kontrolnih volumena	40
Slika 5.15 Prikaz djelova mreža u okolini vrha klina	41

POPIS TABLICA

Tablica 1 Lista slučajeva simulacija provedenih u radu	25
Tablica 2 Prikaz dobivenih frekvencija u svim proračunima	41

POPIS OZNAKA

Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis
a^{-2}	m/s	brzina zvuka;
c_v	J/(kgK)	specifični topliski kapacitet pri konstantnom volumenu;
e	J	specifična energija;
E	-	empirijska konstanta;
f	-	funkcija;
f_i	N/kg	polje gustoće masenih sila;
f	Hz	frekvencija;
H	m	dimenzije koje definiraju geometriju domene proračuna;
H_1		
H_2		
V		
j	-	imaginarna jedinica;
k	m^2 / s^2	kinetička energija turbulencije;
p	Pa	statički tlak;
p_0	Pa	totalni tlak;
P	Pa	amplituda statičkog tlaka;
P_k	m^2 / s^3	produkcijski član u jednadžbi turbulentne kinetičke energije;
q_i	W/m^2	vektor površinske gustoće snage toplinskog toka;
R	J/(kgK)	specifična plinska konstanta;
Re	-	Reymoldsov broj;
S_{ij}	1/s	tenzor gradijenta brzine deformacije;
t	s	vrijeme;
T	K	apsolutna temperatura;
T_0	°	period osciliranja;
u	J/kg	specifična unutarnja energija;
u^+	-	bezdimenzijska brzina;

u_τ	m/s	brzina trenja;
v_i, v_j	m/s	brzina;
V	m ³	volumen;
x_i, x_j	m	vektor položaja;
X_k	-	koeficijent Fourierovog reda;
y^+	-	bezbimenzijaska udaljenost od zida.

Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis
α	°	kut klina;
γ	-	izentropski eksponent;
Γ_ϕ	-	koeficijent difuzije polja ϕ ;
δ	m	širina mlaznice;
δ_{ij}	-	Kroneckerov delta simbol, jedinični tenzor;
ε	m ² / s ³	disipacija turbulentne kinetičke energije;
κ	-	von Kármánova konstanta;
λ	W/(mK)	toplinska provodnost;
μ	Pas	dinamička viskoznost;
μ_t	Pas	turbulentna dinamička viskoznost;
ν	m ² / s	kinematička viskoznost;
ν_t	m ² / s	turbulentna kinematička viskoznost;
ρ	kg/m ³	gustoća;
σ_{ji}	Pa	tenzor naprezanja;
Σ_{ji}	Pa	tenzor viskoznih naprezanja;
τ_w	Pa	tangencijalno naprezanje na zidu;
ϕ	-	skalarno polje fizikalne veličine;
ω	1 / s	specifična disipacija turbulentne kinetičke energije;
Ω_0	rad/s	kružna frekvencija.

SAŽETAK

Ako tok fluida nastrujava na klinasti objekt, fluid se ne odvaja jednakomjerno na obje strane klina, već nakon vrlo kratkog perioda počinju nestacionarnosti te odvajanje vrtloga naizmjenično s jedne strane na drugu, što u određenim situacijama izaziva slabi tlačni poremećaj, odnosno zvuk. Ova pojava, koja se zove *edge tone* nije nimalo jednostavna i predvidljiva, unatoč geometrijskoj jednostavnosti klina koji je uzrokuje. Jedan od primjera pojave *edge tone*-a je generiranje zvuka nastrujavanjem zraka iz ustiju na pisak puhaćeg instrumenta. Osim u glazbenoj industriji, pojava je prisutna i u mnogim drugim situacijama, kao što je generiranje buke na nosaču tereta na krovu automobila ili pojava zvuka prilikom puhanja u zviždaljku. U radu je provedeno šesnaest simulacija na pet različitih mreža prostorne diskretizacije s tri modela strujanja: laminarni model te $k-\varepsilon$ i $k-\omega$ SST modeli turbulencije. U skladu s literaturom, rezultati pokazuju postojanje više dominantnih frekvencija, odnosno stadija. Dane su usporedbe dobivenih dominantnih frekvencija osciliranja za sve slučajeve u više točaka unutar domene proračuna. Proračuni su uspoređeni i s obzirom na mrežu prostorne diskretizacije i model turbulencije koji se koristi u pojedinom proračunu.

Ključne riječi: *edge tone*, frekvencija osciliranja, modeli turbulencije, nestacionarnost

SUMMARY

If a fluid flow is directed at a wedge, the fluid does not divide equally on both sides of the wedge, but after a very short period of time instabilities appear and vortexes start to shed from one side to another, what, in specific circumstances, induces a small pressure disturbance or a sound. This phenomenon, the edge tone, is not simple and predictable, despite geometrical simplicity of the wedge that induces it. One of the examples of edge tone is sound generation by directing an air from mouth on a mouthpiece of a wind instrument. Beside music industry, edge tone is present in many other situations, such as noise generation on a load carrier on a car roof or sound apperance when blowing into a whistle. In this project sixteen simulations have been made on five different meshes with three flow models: laminar model and $k-\varepsilon$ and $k-\omega$ SST turbulence models. In accordance with the literature, the results have shown the existence of more dominant frequencies or stages. The comparisons of dominant frequencies have been given for all the cases in several monitoring points inside computation domain. Simulations have also been compared considering the mesh and turbulence model that are used in each simulation.

Key words: edge tone, frequency of oscilation, turbulence models, instability

1 UVOD

Od početaka mehanike fluida kao znanosti postoje dva osnovna pristupa: teorijski i eksperimentani. Teorijski se temelji na analitičkom rješavanju jednadžbi koje opisuju strujanje fluida, čime se najbolje opisuju fizikalne pojave u mehanici fluida. Osnovni problem analitičkog načina rješavanja je činjenica da je ono primjenjivo na vrlo ograničen broj slučajeva koji su prisutni u inženjerskim problemima. Većina matematičkih modela u problemima mehanike fluida opisana je nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama koje je nemoguće riješiti analitički. Zbog toga je u prošlosti dominantan pristup problemima mehanike fluida bio eksperimentalni pristup. Eksperimentalni pristup ima mnogo prednosti jer daje realan uvid u neku fizikalnu pojavu, no upotreba eksperimenata je ograničena prvenstveno zbog visoke cijene pripreme i provedbe eksperimenata.

U zadnjih 35 godina omogućena je primjena numeričkih metoda u rješavanju matematičkih modela u mehanici fluida zbog razvoja računala, što je bio uvjet nastanku računalne dinamike fluida (engl. Computational Fluid Dynamics, skraćeno: CFD) kao treće grane mehanike fluida. Od tada počinje nagli rast razvoja numeričkih metoda zbog toga što daju rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi te su ekonomski većinom isplativije od eksperimenata.

Cilj ovog rada je analiza različitih metoda simulacija akustičnih pojava na geometriji 2-D akustičkog klina. U praksi se ta pojava zove *edge tone*. Prilikom nastrujavanja zraka na vrh klina, mlaz se ne odvaja simetrično tijekom cijelog vremena pojave, već se nakon određenog vremena počinju stvarati vrtlozi naizmjenično s obje strane, da bi se na kraju ustalila relativno stabilna frekvencija promjene fizikalnih veličina, npr. tlaka. Unatoč jednostavnoj geometriji 2-D akustičkog klina, ova pojava pokazuje izrazito složeno ponašanje struje fluida. Primjer *edge tone*-a u industriji je osciliranje toka zraka oko poprečnog nosača na krovu automobila. Pojava je odgovorna za nastajanje zvuka na nekim glazbenim instrumentima (orgulje, flauta, saksofon, frula). Na Slika 1.1 je prikazan primjer osciliranja toka fluida oko klinastog objekta.



Slika 1.1 Primjer stvaranja vrtloga naizmjenično s obje strane klinastog objekta

U radu se najprije opisuju matematičke osnove, odnosno osnovne jednačbe kojima se opisuje strujanje fluida: Navier-Stokesove jednačbe te vremenski osrednjene jednačbe (RANS) te nakon toga matematička forma rubnih uvjeta. Ukratko su opisani modeli turbulencije korišteni u proračunima. Pod poglavljem Fourierova transformacija dane su jednačbe kojima se provodi transformacija te je dana svrha upotrebe. U sljedećem potpoglavlju su opisane jednačbe koje se koriste u linearnoj akustičnoj teoriji. U poglavlju Diskretizacija jednačbi, implementacija rubnih uvjeta se detaljnije opisuje diskretizacija nestacionarnog člana te sheme vremenske diskretizacije. Slijedi opis geometrije i rubnih uvjeta gdje su prikazane mreže diskretizacije geometrije te se opisuju zadani rubni uvjeti. U prikazu rezultata se analiziraju provedeni 2-D proračuni nestlačivog strujanja oko 2-D klina u stacionarnom i tranzijentnom strujanju. Najprije je proveden proračun laminarnog, a nakon toga proračuni turbulentnog nestacionarnog strujanja (s modelima turbulencije $k-\varepsilon$ i $k-\omega$ SST). Kao treća faza pokušana je provedba numeričke akustičke simulacije (CAA) primjenom lineariziranog akustičnog rješavača po linearnoj akustičnoj teoriji.

Rezultati rada su dobiveni pomoću programskog paketa OpenFOAM.

2 MATEMATIČKE OSNOVE

2.1 Matematički model strujanja

U skup jednažbi osnovnih zakona dinamike fluida spadaju:

- Zakon očuvanja mase, odnosno jednažba kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} \quad (1.1)$$

- Zakon količine gibanja, odnosno jednažba količine gibanja:

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho v_j v_i)}{\partial x_j} + \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (1.2)$$

- Zakon očuvanja energije, odnosno energetska jednažba:

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho v_j e)}{\partial x_j} + \rho f_i v_i + \frac{\partial (\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (1.3)$$

Gornji skup jednažbi daje sustav od pet skalarnih jednažbi, budući da su jednažba kontinuiteta i energetska jednažba skalarne, a jednažba količine gibanja vektorska jednažba koja se može razložiti na tri skalarne. Gornji sustav jednažbi vrijedi za sve fluide, no nije dostatan za jednoznačan opis strujanja fluida zbog nejednakosti broja jednažbi i broja nepoznatih polja fizikalnih veličina u tim jednažbama. Od svih polja u sustavu, poznato je samo polje gustoće masenih sila f_i , a ostalih 14 su nepoznata polja: gustoća ρ , tri komponente brzine v_i , šest komponenti tenzora naprezanja σ_{ji} , energija e i tri komponente vektora površinske gustoće snage toplinskog toka q_i .

U cilju izjednačavanja broja jednažbi i broja nepoznatih polja fizikalnih veličina, uvode se dopunske pretpostavke (jednažbe) o svojstvima fluida. Zbog njihovog uvođenja novi, prošireni, sustav jednažbi više ne vrijedi za sve fluide, nego vrijedi samo za one na koje je ograničen uvođenjem novih jednažbi. Dopunske jednažbe su sljedeće:

- Odnosi za idealni plin:

$$\text{toplinska jednađžba stanja: } \frac{p}{\rho} = RT \quad \text{i} \quad (1.4)$$

$$\text{kalorička jednađžba stanja: } u = c_v T. \quad (1.5)$$

- Fourierov zakon toplinske vodljivosti:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1.6)$$

- Newtonov zakon viskoznosti:

Tenzor naprežanja u fluidu glasi

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji} \quad (1.7)$$

gdje je δ_{ji} jedinični tenzor, a Σ_{ji} tenzor viskoznih naprežanja koji je simetričan te uz pretpostavku nestlačivog strujanja (brzine čestica su manje od Mach 0,3) vrijedi izraz

$$\Sigma_{ji} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (1.8)$$

Gore navedene relacije odnose se na newtonovski idealni plin, što je vrlo dobra aproksimacija zraka, medija koji se koristi u ovom radu. U sustavu jednađžbi u kojem su uvršteni osnovni zakoni dinamike fluida (1.1), (1.2) i (1.3), te dopunske relacije, usklađen je broj jednađžbi (7) i nepoznatih polja (7): ρ , v_j , p , u i T . Također se uvrštava pretpostavka o nestlačivom strujanju $\rho = \text{konst.}$:

- jednađžba kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.9)$$

- jednađžba količine gibanja:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} + \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.10)$$

- energijska jednađžba te toplinska i kalorička jednađžba stanja.

U gornjem sustavu jednažbi postoji varijabla vremena te varijable prostornih koordinata, što znači da sustav, uz zadavanje početnih i rubnih uvjeta, koji će biti opisani u poglavlju 4, jednoznačno opisuje strujanje newtonovskog idealnog plina. Jednažba količine gibanja se rastavlja na sustav od tri skalarne jednažbe koje se zovu i Navier-Stokesove jednažbe.

2.2 Rubni uvjeti

Na granicama domene je potrebno zadati rubne uvjete kako bi sustav jednažbi (1.9) i (1.10) bio rješiv. S matematičkog gledišta se osnovni rubni uvjeti dijele na Dirichletove i von Neumanove. Dirichletovi rubni uvjeti propisuju vrijednost određene veličine, dok von Neumanov propisuje vrijednost gradijenta u smjeru normale na granicu. S fizikalnog gledišta se razlikuju ulazna granica, koja označava ulaz fluida u domenu, izlazna granica, koja označava izlaz fluida iz domene, zid, koji znači nepropusnu granicu te ravnina simetrije, koja omogućuje smanjenje domene proračuna u slučaju simetričnog strujanja fluida. Na ulaznoj se granici obično zadaje Dirichletov rubni uvjet brzine i von Neumanov rubni uvjet tlaka, dok se na izlaznoj granici zadaje von Neumanov uvjet brzine i tlaka.

2.3 Vremenski osrednjene Navier-Stokesove jednačbe

Zbog činjenice da je turbulentno strujanje stohastičke prirode te izrazito nestacionarno, ono se ne može opisati analitički. U numeričkom rješavanju se javljaju problemi vremenske i prostorne diskretizacije domene problema strujanja zbog uvjeta izrazito malog vremenskog koraka integracije te guste mreže diskretizacije kako bi se mogle obuhvatiti najviše frekvencije i najmanje amplitude pulsacija fizikalnih veličina. Kako su navedeni uvjeti računalno izrazito zahtjevni, Navier-Stokesove jednačbe se prije rješavanja uprosječu (odnosno sve veličine u jednačbama) pa vremenski koraci ne moraju biti toliko mali, a mreža toliko gusta. U slučaju vremenskog uprosječivanja (zove se i Reynoldsovo uprosječenje) dobivaju se vremenski osrednjene Navier-Stokesove jednačbe (engl. *Reynolds Averaged Navier-Stokes*, skraćeno: RANS). Kao rezultat rješavanja osrednjenih jednačbi dobivaju se osrednjene, odn. uprosječene vrijednosti, koje su u konačnici i željene veličine u inženjerskoj praksi.

Ako se promatra nestlačivo turbulentno strujanje, gdje se zanemaruje utjecaj masenih sila, nepoznanice u jednačbi količine gibanja ostaju v_i i p , koje se mogu podijeliti na osrednjeni i pulsirajući dio

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \quad (1.11)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (1.12)$$

Uvrštavajući jednačbe (1.11) i (1.12) u jednačbu količine (1.10) gibanja dobiva se:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial (\bar{v}_i + v_i')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho (\bar{v}_j + v_j') (\bar{v}_i + v_i') \right] = \\ = - \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ako se jednačba (1.13) vremenski osrednji kako je u tekstu opisano, dobiva se sljedeći izraz:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i \bar{v}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v_i' v_j'} \right] \quad (1.14)$$

U jednačbi (1.14) (koja se još naziva i Reynoldsova jednačba) su uvrštena sljedeća pravila o vremenskom uprosječivanju [5]:

$$\begin{aligned}
f &= \bar{f} + f' \\
\overline{f'} &= \overline{f - \bar{f}} = \bar{f} - \bar{\bar{f}} = \bar{f} - \bar{f} = 0 \\
\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \\
\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \\
\overline{f \cdot g'} &= \bar{f} \cdot \bar{g'} = 0 \\
\overline{f \cdot g} &= \overline{\bar{f} \cdot (\bar{g} + g')} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{\bar{f} \cdot g'} = \bar{f} \cdot \bar{g} \\
\overline{f \cdot g} &= \overline{(\bar{f} + f')(\bar{g} + g')} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Zbog zadnjeg pravila u jednađbama (1.15) pojavljuje se član $-\overline{\rho v_i' v_j'}$ u Reynoldsovoj jednađbi koji jedini sadrži veličine iz pulsirajućeg dijela turbulentnog strujanja te fizikalno predstavlja turbulentnu difuziju količine gibanja te se naziva tenzorom turbulentnih ili Reynoldsovih naprežanja. To je simetričan tenzor drugog reda te sadrži šest nepoznanica:

$$-\overline{\rho v_i' v_j'} = \begin{bmatrix} -\overline{\rho v_1' v_1'} & -\overline{\rho v_1' v_2'} & -\overline{\rho v_1' v_3'} \\ -\overline{\rho v_2' v_1'} & -\overline{\rho v_2' v_2'} & -\overline{\rho v_2' v_3'} \\ -\overline{\rho v_3' v_1'} & -\overline{\rho v_3' v_2'} & -\overline{\rho v_3' v_3'} \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Sada broj nepoznanica više ne odgovara broju jednađbi. U Reynoldsovoj jednađbi se nije moguće ograničiti samo na uprosječene veličine upravo zato jer sadrži član turbulentnih naprežanja $-\overline{\rho v_i' v_j'}$. U tom članu se pojavljuje dvojna korelacija brzina $\overline{v_i' v_j'}$. Moguće je izvesti dodatnu jednađbu koja bi opisivala već prisutnu dvojnu korelaciju brzina, u kojoj bi se pojavio član trojne korelacije, čijim bi se opisom javljale nove, više korelacije. Zato se uvode modeli turbulencije koji služe za izjednačavanje broja nepoznanica i broja jednađbi, uzimajući u obzir određenu korelaciju brzina. Postoje modeli turbulencije prvog i drugog reda, ovisno o stupnju korelacije. Budući da su se u ovom radu upotrebljavali modeli prvog reda, bit će ukratko opisani u sljedećem poglavlju.

2.4 Modeli turbulencije

U modelima prvog reda, dvojna korelacija brzina najčešće se modelira prema hipotezi Boussinesqa:

$$-\overline{\rho v_i' v_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij}. \quad (1.17)$$

Koeficijent μ_t označava turbulentnu viskoznost, što nije fizikalno svojstvo fluida, već se javlja zbog samog strujanja. U laminarnom strujanju je jednak nuli. Kinetička energija turbulencije \bar{k} se može izvesti kontrakcijom indeksa u jednadžbi (1.17) te iznosi

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{v_i' v_i'}. \quad (1.18)$$

Uvrštavanjem hipoteze Boussinesqa u Reynoldsovu jednadžbu količine gibanja dobiva se

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i \bar{v}_j) = - \frac{\partial \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho \bar{k} \right)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (1.19)$$

U gornjoj jednadžbi član $\bar{p} + \frac{2}{3} \rho \bar{k}$ označuje efektivni tlak, dok član $\mu + \mu_t$ označuje efektivnu viskoznost, kao zbroj laminarne i turbulentne viskoznosti.

U radu su upotrebljena dva modela turbulencije: $k-\varepsilon$ i $k-\omega$ SST. To su modeli turbulencije prvog reda te su opisani pomoću dvije jednadžbe (engl. *two-equation models*).

2.4.1 $k-\varepsilon$ model turbulencije

Do početka 90-ih godina prošlog stoljeća $k-\varepsilon$ model bio je najzastupljeniji model s dvije jednadžbe. Od tada se koristi sve manje zbog razvoja novih modela koji osiguravaju veću točnost rezultata. Glavna prednost ovog modela je njegova mala ovisnost o rubnim uvjetima daleko od zida. S druge strane, nedostatak modela je netočnost pri velikim gradijentima tlaka te u prisutnosti strujanja u suprotnom smjeru, stoga daje manje točne rezultate u blizini stjenke, u laminarnom podsloju, gdje su veliki gradijenti tlaka i niski Reynoldsovi brojevi.

U ovom modelu se rješava transportna jednadžba za varijable: k - turbulentna kinetička energija i ε - turbulentna disipacija (obje veličine su izražene po jedinici mase). Veličina ε je definirana izrazom

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}} \quad (1.20)$$

Turbulentna viskoznost je tako u ovom modelu definirana pomoću veličina k i ε

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \text{ odnosno } \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (1.21)$$

a k i ε se računaju pomoću sljedećih transportnih jednažbi

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k v_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon \quad (1.22)$$

i

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon v_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon}^* \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (1.23)$$

gdje vrijedi

$$C_{2\varepsilon}^* = C_{2\varepsilon} + \frac{C_\mu \eta^3 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right)}{1 + \beta \eta^3}$$

te

$$\eta = S \frac{k}{\varepsilon} \text{ i } S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}.$$

U zadnjoj jednažbi član S_{ij} označuje tenzor gradijenta brzine deformacije

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.24)$$

Konstante u jednažbama (1.21), (1.22) i (1.23) su

$$C_\mu = 0,09; \quad \sigma_k = 1, \sigma_\varepsilon = 1,3; \quad C_{1\varepsilon} = 1,44; \quad C_{2\varepsilon} = 1,92; \quad \eta_0 = 4,38 \text{ i } \beta = 0,012.$$

2.4.2 $k-\omega$ SST model turbulencije

U slučajevima velikih gradijenata tlaka dobru zamjenu $k-\varepsilon$ modelima predstavljaju $k-\omega$ modeli turbulencije [2]. Nedostatak ovih modela je velika ovisnost o rubnim uvjetima daleko od zida. Kako su u blizini zida $k-\omega$ modeli bolji, a daleko od zida $k-\varepsilon$ modeli, desila se potreba za njihovom kombinacijom te 1993. nastaje $k-\omega$ SST model. U području blizu stijenke se koristi $k-\omega$ model, dok se u domeni strujanja daleko od zida model prebacije na $k-\varepsilon$.

U slučaju $k-\omega$ SST modela rješavaju se također dvije transportne jednačbe, za veličine k i ω - specifična disipacija (po jedinici kinetičke energije):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_i \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \beta^* k \omega \quad (1.25)$$

i

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_i \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha S^2 - \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}. \quad (1.26)$$

Kinematička turbulentna viskoznost se dobiva iz izraza

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}. \quad (1.27)$$

Pomoćne relacije potrebne za jednoznačno definiranje sustava su

$$F_2 = \tanh \left[\left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right],$$

$$P_k = \min \left(\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, 10\beta^* k \omega \right),$$

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{C \cdot D_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right\},$$

$$C \cdot D_{k\omega} = \max \left(2\rho \delta_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right)$$

te

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_1).$$

Konstante upotrebene u gornjim izrazima iznose:

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}; \quad \alpha_2 = 0,44; \quad \beta_1 = \frac{3}{40}; \quad \beta_2 = 0,0828; \quad \beta^* = 0,09;$$

$$\sigma_{k1} = 0,85; \quad \sigma_{k2} = 1; \quad \sigma_{\omega1} = 0,5 \quad \text{te} \quad \sigma_{\omega2} = 0,856.$$

2.5 Turbulentni granični sloj

Eksperimentalna istraživanja pokazuju da brzina fluida u smjeru strujanja ovisi o udaljenosti od stjenke prema logaritamskom zakonu. Ovo zapažanje je uvjetovalo nastanku "zakona zida" koji opisuje odnose veličina u turbulentnom strujanju blizu stjenke. Kombinacijom empirijskih opažanja i dimenzijske analize dolazi se do sljedećih odnosa.

Skala brzine

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (1.28)$$

se definira kao brzina trenja jer ima dimenziju [m/s].

Također je moguće definirati skalu duljine ν/u_τ [m] te, uzimajući u obzir koordinatu u smjeru

normale na stjenku y te gradijent brzine $\frac{\partial v}{\partial y}$, dobiva se izraz

$$\frac{\bar{v}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + C, \quad (1.29)$$

gdje C predstavlja bezdimenzijsku konstantu, a \bar{v} srednju brzinu fluida u smjeru strujanja u određenoj točki. Supstitucijom izraza u jednadžbi (1.29)

$$u^+ \equiv \frac{\bar{v}}{u_\tau} \quad \text{i} \quad y^+ \equiv \frac{u_\tau y}{\nu}$$

te njenim preuređenjem, dolazi se do konačnog izraza

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln E y^+, \quad (1.30)$$

gdje su

$\kappa = 0,41$ - von Kármánova konstanta i

$E = 9,793$ - empirijska konstanta.

U višeslojnom modelu turbulentnog graničnog sloja postoje tri područja, ovisno o iznosu y^+ :

- viskozni (linearni) podsloj, sa $0 < y^+ \leq 5$

- prijelazni sloj, sa $5 < y^+ \leq 30$

- inercijski podsloj, sa $30 \leq y^+ < 400$.

U viskoznom podsloju, gdje je utjecaj turbulencije vrlo umanjen ($\mu_t \ll \mu$), vrijedi linearni odnos

$$u^+ = y^+, \quad (1.31)$$

dok u inercijalnom podsloju, gdje utjecaj turbulencije prevladava ($\mu_t \gg \mu$) vrijedi logaritamski odnos pod (1.30).

U prijelaznom sloju je slučaj da su molekularna i turbulentna viskoznost istog reda veličine.

2.6 Fourierova transformacija

Fourierova transformacija, matematička transformacija nazvana prema Josephu Fourieru, služi za prebacivanje signala iz vremenske (ili prostorne) domene u frekvencijsku. U obrnutom slučaju prijenosa signala transformacija se zove inverzna Fourierova transformacija. U ovom radu se Fourierova transformacija primjenjuje pri određivanju prevladavajuće frekvencije pulsacija sile i tlaka u određenim točkama domene proračuna. U ovome će se odjeljku najprije ukratko objasniti pojam Fourierovog reda te, potom, Fourierova transformacija.

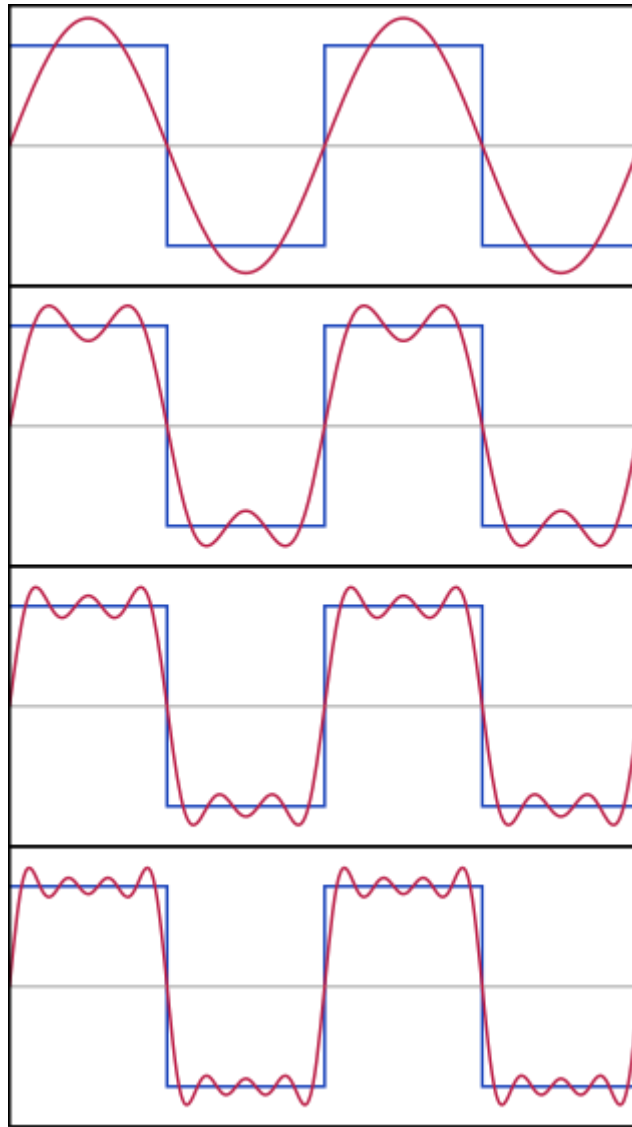
Fourierov red je vrsta matematičkog reda koji rastavlja neku periodičnu funkciju kao sumu osnovnih trigonometrijskih, također oscilatornih, funkcija, sinuse i kosinuse, odnosno kao kompleksne eksponencijalne funkcije. Budući da je analiza jednadžbi koje opisuju periodični signal računski jednostavnija u kompleksnom zapisu, prikaz funkcija se neće davati u formi trigonometrijskih funkcija, već će se, primjenjujući Eulerove identitete, davati u formi kompleksnih eksponencijala. Tako se, već spomenuti, Fourierov red prikazuje kao linearna kombinacija kompleksnih eksponencijala

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad (1.32)$$

gdje, k označuje red, X_k koeficijente reda, j imaginarnu jedinicu, Ω_0 kružnu frekvenciju, a $e^{jk\Omega_0 t}$ k -ti harmonik ili k -tu harmonijsku komponentu signala $x(t)$. Period osciliranja signala $x(t)$ dan je s

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}. \quad (1.33)$$

Na sljedećoj slici dan je primjer aproksimacije pravokutnog signala s prve četiri parcijalne sume Fourierova reda.



Slika 2.1 Prve četiri aproksimacije pravokutnog vala pomoću Fourierovog reda

Ako se želi pomoću Fourierovog reda prikazati neki kontinuirani periodični signal, potrebno je odrediti koeficijente reda X_k . Oni se mogu izračunati polazeći od (1.32) na način da se jednačba pomnoži s $e^{-jm\Omega_0 t}$ te integrira po vremenu, preko jednog perioda T_0 s obje strane jednačbe. Za slučaj $k = m$ dobiva se izraz za koeficijente Fourierovog reda

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt. \quad (1.34)$$

U slučaju periodičnog signala u vremenskoj domeni, Fourierova transformacija se svodi na proračun s diskretnim vrijednostima kompleksnih amplituda, odnosno s koeficijentima Fourierovog reda. Tako se Fourierova transformacija definira kao

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad (1.35)$$

a inverzna Fourierova transformacija kao

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} dt. \quad (1.36)$$

Diskretna Fourierova transformacija (engl. *Discrete Fourier transform*, skraćeno DFT), koja je korištena u ovom radu, pretvara konačan broj ekvidistantnih vrijednosti funkcije u listu s konačnim brojem koeficijenata koji poprimaju te vrijednosti funkcije u ovisnosti o frekvenciji. Osim u analizi akustičnih pojava, ova je metoda transformacije najraširenija i u ostalim praktičnim primjenama, kao što je digitalna obradba signala, analiza radio-valova, kretanje temperature zraka kroz određeni vremenski period ili pri bili kojoj fizikalnoj pojavi oscilirajuće prirode. Upravo zbog činjenice što su i ulazni i izlazni signali u diskretnom obliku, DFT se implementira u razne računalne programe i algoritme.

Fast Fourier transform (FFT) je algoritam (odnosno grupa algoritama) za rješavanje DFT i njene inverzne transformacije. Značajka FFT-a je činjenica da broj ulaznih podataka mora biti cjelobrojna potencija od broja 2. FFT daje potpuno iste rezultate kao i DFT, samo u mnogo kraćem vremenu. U ovom radu nije korišten algoritam FFT zbog toga što je i algoritam DFT-a bio dovoljno brz za ovu težinu proračuna.

Također postoji i transformacija *Discrete-time Fourier transform* (DTFT) koja zahtjeva da ulazna funkcija bude zadana kao skup diskretnih vrijednosti. Izlazna funkcija (u frekvencijskoj domeni) je periodična i, kao takva, kontinuirana, po čemu se razlikuje od DFT.

2.7 Linearna akustična teorija

Unese li se u mirujući ili gibajući fluid poremećaj neke fizikalne veličine, to će izazvati poremećaje ostalih veličina, primjerice tlaka, temperature, gustoće ili brzine strujanja fluida. Budući da se svaki medij sastoji od atoma ili molekula, unošenjem poremećaja u sustav atomi i molekule se međusobno sudaraju te se poremećaj širi. Poremećaji mogu biti:

- konačnog intenziteta, kod kojih se javlja poremećaj brzine strujanja koji nije zanemariv (nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe opisuju strujanje) te
- slabi tlačni poremećaji, odnosno akustični poremećaji, kod kojih je poremećaj brzine strujanja zanemariv, što rezultira zanemarivanjem nelinearnih konvekcijskih članova u jednačbama koje opisuju strujanje fluida. Zbog toga se jednačbe mogu linearizirati, što proračun čini lakšim.

U ovome će se potpoglavlju analizirati akustični poremećaji koji su opisani osnovnim zakonima dinamike fluida. Krećući od parcijalnih diferencijalnih jednačbi (1.1) i (1.2) koje se modificiraju:

- zakon očuvanja mase

$$(1.1) \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0, \quad (1.37)$$

- zakon očuvanja količine gibanja

$$(1.2) \rightarrow \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} = 0 \quad (1.38)$$

- te zakon očuvanja energije

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + q. \quad (1.39)$$

Koristeći jednačbu stanja idealnog plina (1.4) energetska jednačba se zapisuje

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \gamma p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = (\gamma - 1) q. \quad (1.40)$$

U sustavu od tri jednačbe (1.37), (1.38) i (1.40) se pojavljuju tri nepoznata polja: gustoća fluida, tlak i brzina što sustav čini određenim. Kako se govori o poremećajima veličina, svaka od njih se može zapisati kao zbroj osrednjene i pulsirajuće vrijednosti

$$\begin{aligned}\rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ u &= \bar{u} + u' \\ p &= \bar{p} + p' \\ q &= \bar{q} + q'\end{aligned}\tag{1.41}$$

Ako se jednačbe (1.41) uvrste u sustav (1.37), (1.38) i (1.40), zanemarujući male iznose nelinearnih konvekcijskih članova, dobiva se sustav

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} + \rho' \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} = 0\tag{1.42}$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \bar{\rho} v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \rho' \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0\tag{1.43}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial p'}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \gamma \bar{p} \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} + \gamma p' \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = (\gamma - 1) q' .\tag{1.44}$$

Uvođenjem pretpostavke o izentropskim poremećajima, jednačba za brzinu zvuka zamjenjuje jednačbu (1.42)

$$\frac{\bar{v}^2}{a^2} = \frac{p'}{\rho'} .\tag{1.45}$$

Nakon uvedenih pojednostavljenja i pretpostavki o širenju poremećaja dolazi se do jednačbi

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{p}' \frac{\bar{v}_j}{\gamma \bar{p}} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0\tag{1.46}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial p'}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \gamma \bar{p} \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} + \gamma p' \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = (\gamma - 1) q'\tag{1.47}$$

koje treba riješiti kako bi se dobilo polje veličina izazvanih akustičnim poremećajima.

3 DISKRETIZACIJA JEDNADŽBI, IMPLEMENTACIJA RUBNIH UVJETA

Kao što je spomenuto u uvodu, parcijalne diferencijalne jednačbe su u većini slučajeva analitički nerješive. Budući da su proračuni izvršeni pomoću metode kontrolnih volumena, tako će se u sljedećim potpoglavljima opisati primjena metode u integriranju opće skalarne jednačbe.

3.1 Diskretizacija opće transportne jednačbe

Za skalarno polje ϕ opća transportna jednačba glasi

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial(\rho v_j \phi)}{\partial x_j} = S_\phi. \quad (1.48)$$

Prvi član gornje jednačbe se zove nestacionarni, drugi difuzijski, treći konvekcijski, a četvrti izvorski član. Simbol Γ_ϕ označuje koeficijent difuzije. Integriranjem gornje jednačbe po kontrolnom volumenu dobije se izraz

$$\int_{V_p} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV - \int_{V_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV + \int_{V_p} \frac{\partial(\rho v_j \phi)}{\partial x_j} dV = \int_{V_p} S_\phi dV. \quad (1.49)$$

Problem s kojim se u ovaj rad bavi opisan je jednačbama parabolickog tipa. U jednačbi (1.48) se pojavljuju druge derivacije samo po prostornim koordinatama, dok se po vremenu pojavljuje samo prva derivacija, što jednačbu čini parabolickom. U parabolickim jednačbama se većinom integracija vrši u smjeru vremenske koordinate te će numericki postupak proračuna imati marširajući karakter. Također je u nekim slučajevima moguće da koordinata u smjeru strujanja bude parabolicka umjesto vremenske, kao što je proračun u graničnom sloju.

U sljedećim će potpogavljima biti opisana diskretizacija nestacionarnog člana transportne jednačbe te sheme vremenske diskretizacije koje se koriste u radu. Diskretizacija difuzijskog, konvekcijskog i izvorskog člana neće se detaljno opisivati.

3.1.1 Diskretizacija nestacionarnog člana

Diskretizacija vremenskog člana se provodi na više različitih načina, odnosno postoji više shema vremenske diskretizacije. Razlikuju se:

- Eulerova eksplicitna metoda
- Eulerova implicitna metoda (prvog i drugog reda točnosti)
- Crank-Nicolsonova metoda

U radu je većinom korištena implicitna metoda prvog reda točnosti (u daljnjem tekstu „Euler“) te implicitna metoda drugog reda točnosti (u daljnjem tekstu „backward“) i Crank-Nicolsonova metoda.

3.1.1.1 Eulerova eksplicitna metoda

U Eulerovoj eksplicitnoj metodi se vremenska derivacija aproksimira formulom za diferenciranje „unaprijed“ (engl. *forward*). Budući da su iznosi fizikalnih veličina iz prošlosti poznati, vrijedi jednakost

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{n-1} = \frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{\Delta t}, \quad (1.50)$$

gdje indeks n označava vremensku koordinatu, a indeks $n-1$ označuje vremenski trenutak pomaknut za jedan vremenski korak unazad. Iz jednadžbe (1.50) je vidljivo da je prvog reda točnosti. Uvrštavajući jednadžbu (1.50) u (1.48) dobiva se izraz

$$\frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{\Delta t} = L_1^{n-1}(\phi_i^{n-1}, \phi_{i+1}^{n-1}, \phi_{i-1}^{n-1}, \dots). \quad (1.51)$$

Operator L je u eksplicitnoj metodi definiran u prošlom vremenskom trenutku, a indeks i označava prostornu koordinatu. Za slučaj konvekcije i difuzije operator obuhvaća obje aproksimacije prostornih derivacija.

Jednadžba (1.51) ima samo jednu nepoznanicu ϕ_i^n koja se izračunava neovisno o ostalim vrijednostima fizikalne veličine u sadašnjem trenutku. Iz gore navedenog se zaključuje da Eulerova eksplicitna metoda ne zahtjeva rješavanje sustava jednadžbi, no ima ograničenje na veličinu vremenskog koraka. Ako vremenski korak postane prevelik, metoda postaje nestabilna te se proračun raspada. Zato je u ovoj metodi nužno da Courantov broj bude manji od jedan.

3.1.1.2 Eulerova implicitna metoda

Zbog problema uvjeta stabilnosti u eksplicitnoj metodi, uvodi se implicitna metoda (engl. *backward Euler implicit*) koja nema taj problem. Programski paket OpenFOAM koristi isključivo implicitne metode. U ovoj se metodi vremenska derivacija aproksimira formulom za

diferenciranje „unazad“, što znači da se promatra sadašnji vremenski trenutak te aproksimacija glasi

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n = \frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{\Delta t}. \quad (1.52)$$

Zaključuje se da je i ova metoda, kao i eksplicitna metoda, prvog reda točnosti. Analognim postupkom kao i u primjeru eksplicitne metode dobivamo izraz

$$\frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{\Delta t} = L_1^n(\phi_i^n, \phi_{i+1}^n, \phi_{i-1}^n, \dots). \quad (1.53)$$

Vidi se da je i desna strana jednadžbe (1.53) funkcija nepoznatih veličina ϕ_{i-1}^n , ϕ_i^n i ϕ_{i+1}^n pa se može zaključiti da je u ovoj metodi potrebno rješavati sustav jednadžbi.

U cilju povećanja točnosti proračuna uvodi se implicitna metoda drugog reda točnosti. Kako bi se to postiglo, nužno je u jednadžbe uvesti dodatan vremenski korak iz prošlog trenutka. Ako se veličine ϕ_i^{n-1} i ϕ_i^{n-2} razviju u Taylorov polinom oko točke (i, n) , kombinacijom ta dva izraza dobiva se izraz za vremensku derivaciju drugog reda točnosti

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n = \frac{3\phi^n - 4\phi^{n-1} + \phi^{n-2}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2), \quad (1.54)$$

gdje $O(\Delta t^2)$ označava ostatak.

3.1.1.3 Crank-Nicolsonova metoda

U Crank-Nicolsonovoj metodi je postignut drugi red točnosti vremenske derivacije bez uzimanja dodatnog vremenskog koraka u obzir. To je postignuto shemom centralnih diferencija na taj način da se vremenska derivacija odnosi na sredinu vremenskog koraka integracije

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{\Delta t}. \quad (1.55)$$

Činjenica da se dodatni vremenski korak ne uzima u obzir ima za posljedicu da je i potrebna memorija prilikom proračuna manja od implicitne metode drugog reda točnosti.

Vrijednost fizikalne veličine ϕ se u sredini intervala određuje linearnom interpolacijom

$$\phi^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi^n + \phi^{n-1}) \quad (1.56)$$

pa se dobiva formula za Crank-Nicolsonovu metodu

$$\frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{\Delta t} = L_1^{n-\frac{1}{2}}(\phi_i^{n-1}, \phi_{i+1}^{n-1}, \phi_{i-1}^{n-1}, \dots, \phi_i^n, \phi_{i+1}^n, \phi_{i-1}^n) \quad (1.57)$$

koja također zahtjeva računanje sustava jednadžbi (u operatoru L se pojavljuju i nepoznate vrijednosti u sadašnjem trenutku), što znači da je i ova metoda implicitna.

3.1.2 Diskretizacija ostalih članova

Detaljan opis diskretizacija difuzijskog, konvekcijskog i izvorskog člana može se vidjeti u [3]. U radu su korištene sljedeće sheme za:

- gradijente varijabli – shema centralnih razlika
- divergencije varijabli – uzvodna shema

3.2 Implementacija rubnih uvjeta

Koristeći programski paket OpenFOAM, u simulacijama su zadavani sljedeći rubni uvjeti:

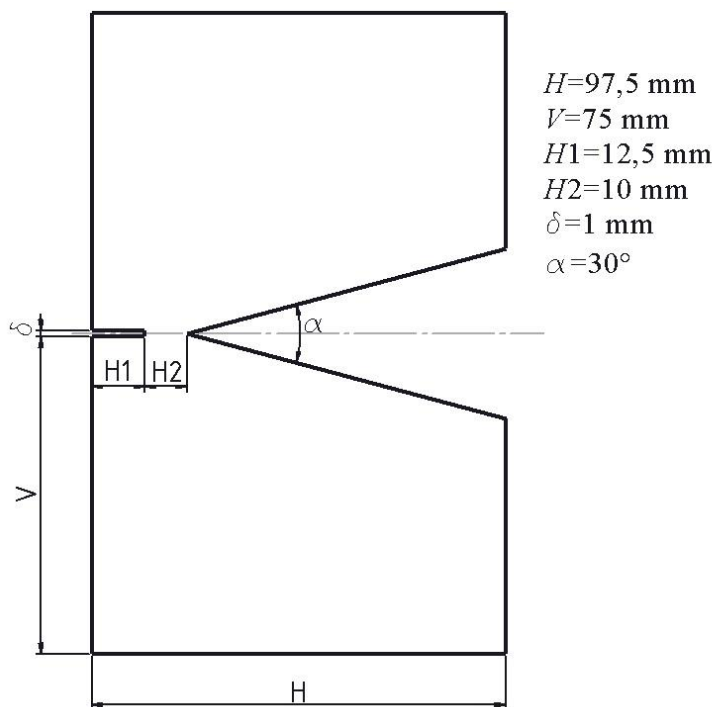
- *fixedValue* – Dirichletov rubni uvjet - propisuje iznos fizikalne veličine,
- *zeroGradient* – von Neumanov rubni uvjet - propisuje da je na granici gradijent određene fizikalne veličine u smjeru normale na granicu jednak nuli,
- *inletOutlet* – Robinov rubni uvjet (kombinacija Dirichletovog i von Neumanovog) - iznosi brzine i tlaka mijenjaju se prema rubnim uvjetima *fixedValue* i *zeroGradient*,
- *slip* – nema uvjeta ljepljenja fluida na stjenku, odnosno strujanje se ponaša kao da je stjenka idealno glatka

te atmosferski rubni uvjet koji se sastoji od rubnih uvjeta

- brzine - *pressureInletOutletVelocity* – kombinirani rubni uvjet - u slučaju pozitivne brzine (u smjeru vanjske normale na granicu), propisan je *zeroGradient*, a u slučaju negativnog iznosa brzine je propisan *fixedValue*,
- zaustavnog tlaka – *totalPressure* – Dirichletov rubni uvjet - propisan je iznos totalnog tlaka $p_0 = p + \frac{1}{2} \rho v^2$, tako da se sukladno promjeni brzine mijenja i statički tlak.

4 OPIS GEOMETRIJE I RUBNIH UVJETA

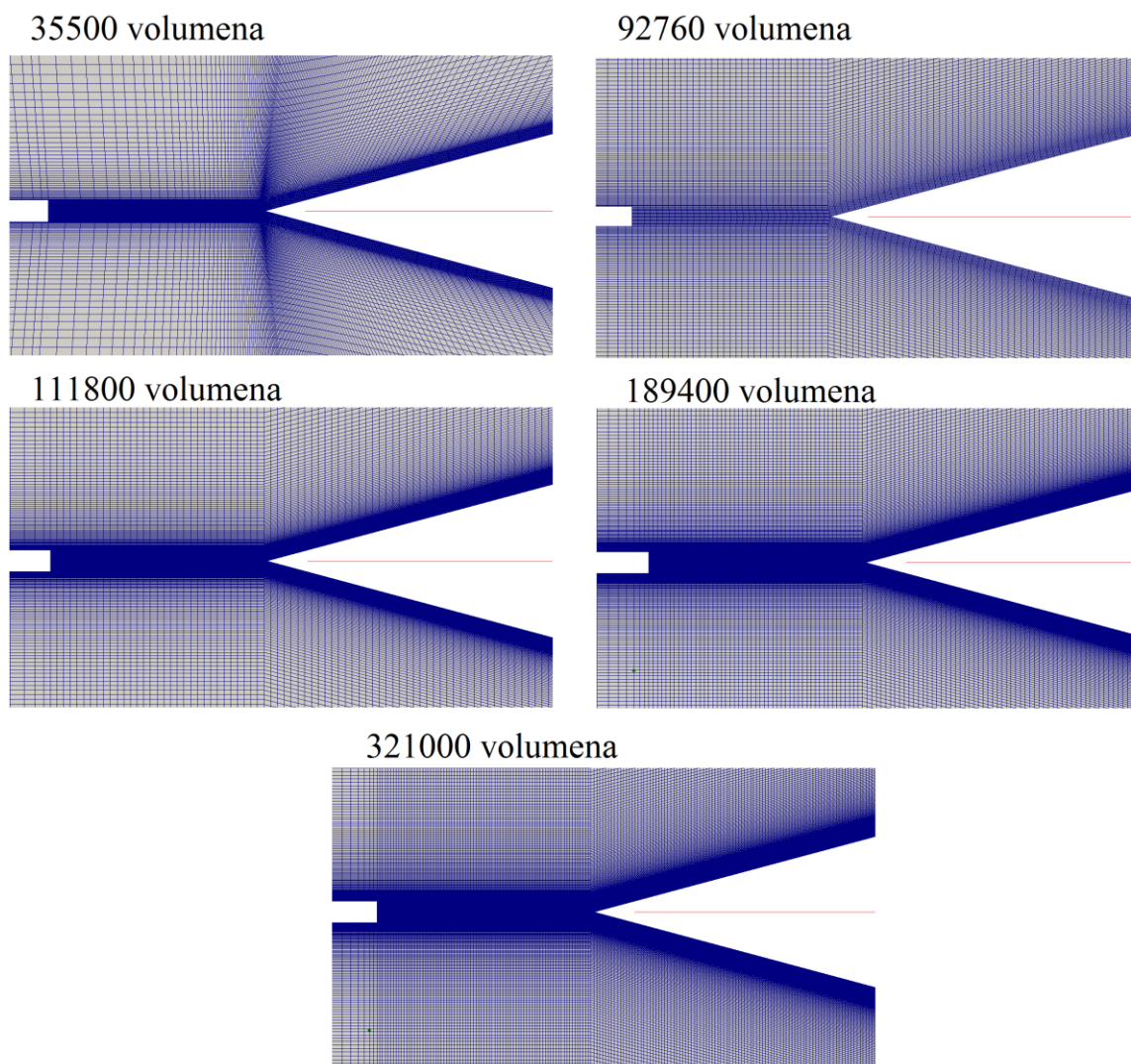
U radu je proračun bio proveden na više različitih geometrija (mreža prostorne diskretizacije) s istim gabaritnim dimenzijama domene proračuna. Dimenzije su preuzete iz [1]. Na Slika 4.1 je prikazana geometrija domene s dimenzijama koje je definiraju.



Slika 4.1 Domena proračuna s dimenzijama

Domena proračuna je dvodimenzionalna zbog pojednostavljenja numeričkog proračuna. Uzevši treću dimenziju u obzir, rezultati se neće uvelike razlikovati [1]. Izlazne granice su postavljene dovoljno daleko od područja interesa (blizina vrha 2-D klina) tako da nemaju velikog utjecaja na točnost rezultata.

Mreže koje su kreirane za ovaj rad su strukturirane te su sastavljene od heksaearskih volumena. Aplikacija koja se koristila za stvaranje mreža zove se blockMesh, a sastavni je dio programskog paketa OpenFOAM. Mreže se međusobno razlikuju po broju volumena i prema njihovom rasporedu unutar domene. Sljedeća slika prikazuje detalje pet različitih mreža koje su se koristile prilikom proračuna.



Slika 4.2 Mreže koje se razlikuju u broju volumena i u prostornome rasporedu volumena
 Zbog praktičnosti u čitanju daljnjeg teksta, mrežama su dana imena po broju volumena u određenoj mreži.

4.1 Rubni uvjeti, svojstva fluida, postavke simulacije

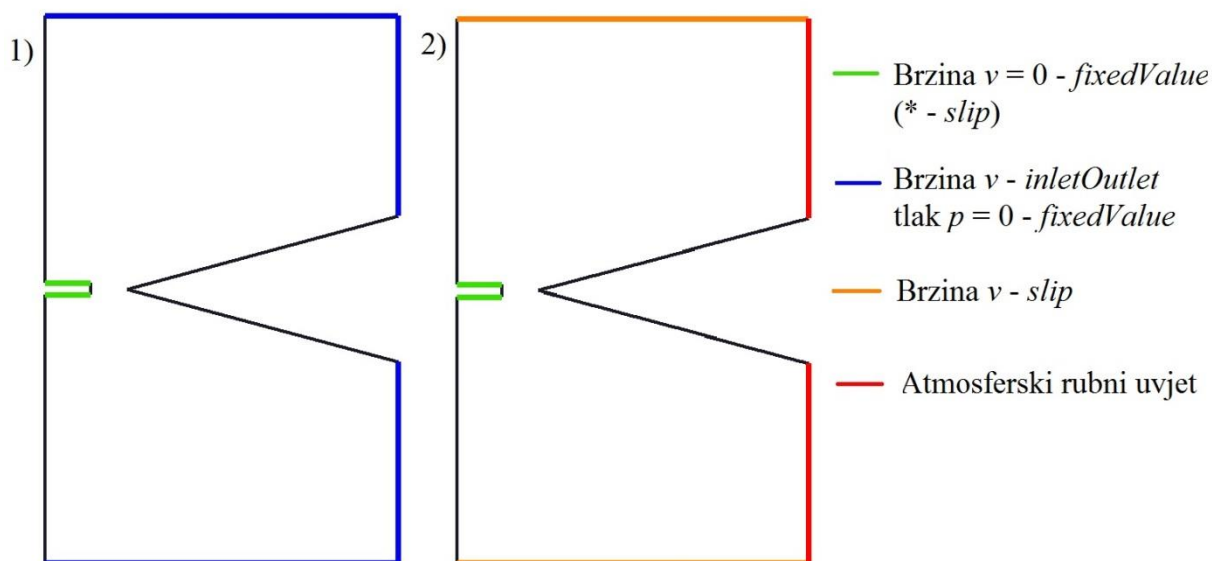
Fluid koji se koristi kao medij u proračunima je zrak na $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ s gustoćom od $\rho = 1,185\text{ kg/m}^3$ i dinamičkom viskoznošću od $\mu = 1,831 \cdot 10^{-5}\text{ kg/ms}$.

Kako je u radu proveden 2-D proračun, na dvjema ravninama koje omeđuju domenu, s gornje i donje strane, zadani su rubni uvjeti *empty*, što znači da se slika strujanja ponavlja u svim presjecima treće koordinate. Na izlazu iz mlaznice je zadana konstantna ulazna brzina po

presjeku mlaznice od 3,09 m/s, kako bi Reynoldsov broj bio jednak 200. Reynoldsov broj je definiran izrazom [1]

$$\text{Re} = \frac{\delta u}{\nu} = \frac{\delta u \rho}{\mu}. \quad (1.58)$$

Kako se u polju strujanja ne bi javljali nefizikalni vrtlozi, na lijevoj je granici zadana ulazna brzina apsolutnog iznosa od 1% ulazne brzine na mlaznici [1]. Bilo je teško postići konvergenciju rezultata s istim rubnim uvjetima u svim slučajevima, pa su na ostalim granicama zadavani različiti rubni uvjeti [Slika 4.3].



Slika 4.3 Prikaz rubnih uvjeta po granicama polja strujanja, više slučajeva rubnih uvjeta

U radu je napravljeno više simulacija koji se razlikuju u različitim kriterijima: rubni uvjeti, profinjenost mreže, duljina vremenskog koraka te sheme vremenske diskretizacije. Kriteriji, prema kojima se slučajevi simulacija razlikuju, dani su u sljedećoj tablici.

model	naziv slučaja	broj volumena u mreži	shema vremenske diskretizacije	duljina vremenskog koraka ($\cdot 10^{-3}$ s)	Slučaj rubnih uvjeta (Slika 4.3)
a) Laminarni	a1	92760	Euler	0,1	1
	a2	92760	backward	0,03	1
	a3	92760	Crank-Nicolson	0,03	1
	a4	35500	Euler	0,01	2
	a5	189400	Euler	0,05	2
	a6	321000	Euler	0,03	2
b) $k-\varepsilon$ model turnulencije	b1	92760	Euler	0,1	1
	b2	111800	Euler	0,1	1*
	b3	189400	Euler	0,05	2
	b4	321000	Euler	0,03	2
	b5	35500	Euler	0,01	2
c) $k-\omega$ SST model turbulencije	c1	35500	Euler	0,01	2
	c2	92760	Euler	0,1	1
	c3	111800	Euler	0,1	2*
	c4	189400	Euler	0,05	2

Tablica 1 Lista slučajeva simulacija provedenih u radu

Napomena: U stupcu shema vremenske diskretizacije je implicitnoj metodi 1. reda točnosti dan naziv *Euler*, a implicitnoj metodi 2. reda točnosti *backward*, u skladu s terminologijom unutar kôda programa OpenFOAM.

U Tablici 1. su znakom * označeni oni slučajevi gdje su na zidovima mlaznice zadani rubni uvjeti *slip*.

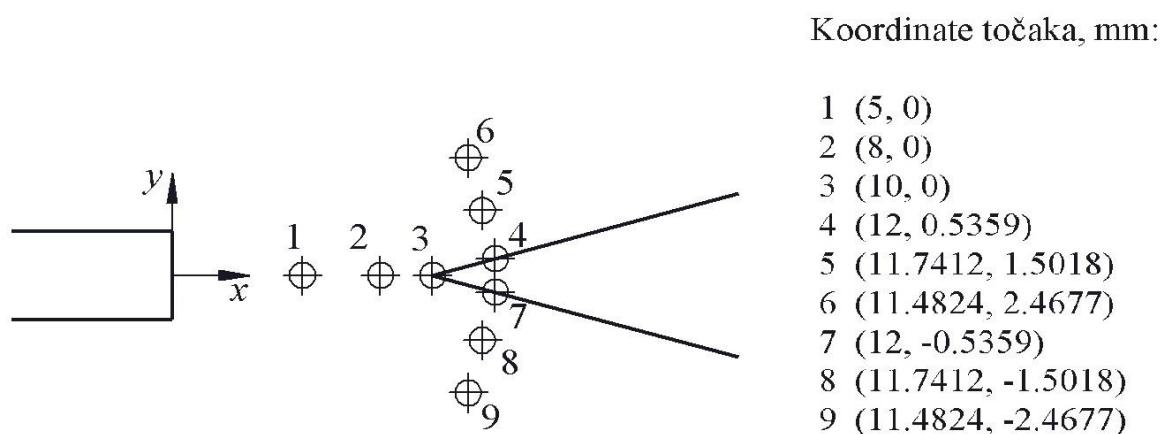
Rubni uvjeti, koji nisu zadani na Slika 4.3, su:

- rubni uvjet brzine v - *fixedValue*, na ulaznim granicama kako je zadano u prijašnjem tekstu te na stjenkama 2-D klina, $v = 0$ (uvjet ljepljenja fluida na stjenku);
- na tlak p - *zeroGradient* po svim ostalim granicama.

U svim slučajevima gdje je korišten $k-\varepsilon$ model turbulencije je početna vrijednost turbulentne disipacije $\varepsilon = 0,13 \text{ m}^2 / \text{s}^3$, odnosno ako je korišten $k-\omega$ SST model je početna vrijednost specifične disipacije $\omega = 400 \text{ s}^{-1}$ (osim u slučaju c2, gdje je $\omega = 270 \text{ s}^{-1}$).

Budući da rezultati u proračunima s mrežom od 35500 volumena nisu konvergirali s duljim vremenskim koracima, zadan je najmanji korak od 0,01 ms.

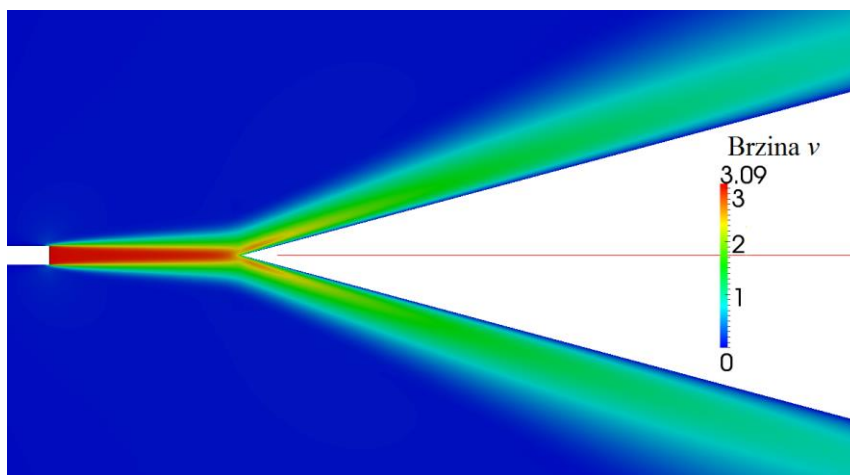
U cilju promatranja rezultata tlakova u određenoj simulaciji na pojedinim točkama unutar domene, definirane su točke promatranja (engl. *probes*) koje su prikazane na Slika 4.4.



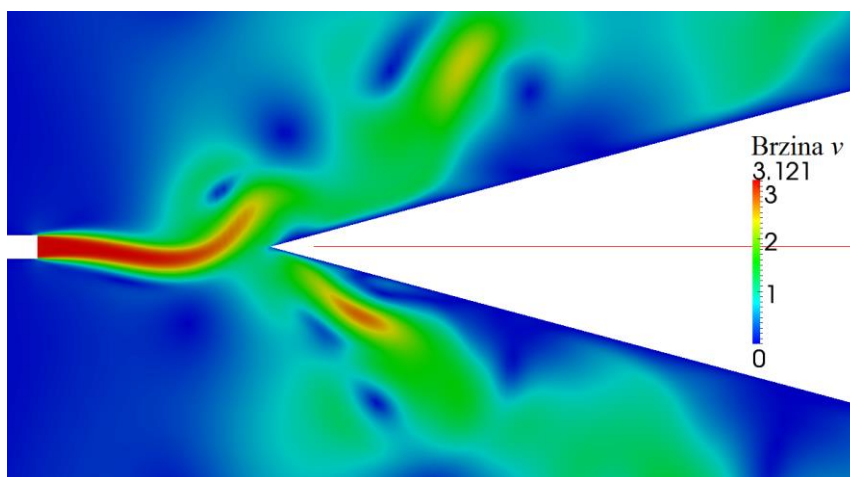
Slika 4.4 Prikaz točaka promatranja tlakova

5 PRIKAZ REZULTATA

U radu su se provodili stacionarni proračun te nestacionarni proračuni. Na Slika 5.1 i Slika 5.2 su prikazana polja brzine za stacionarni, odnosno nestacionarni slučaj.



Slika 5.1 Stacionarno polje brzine



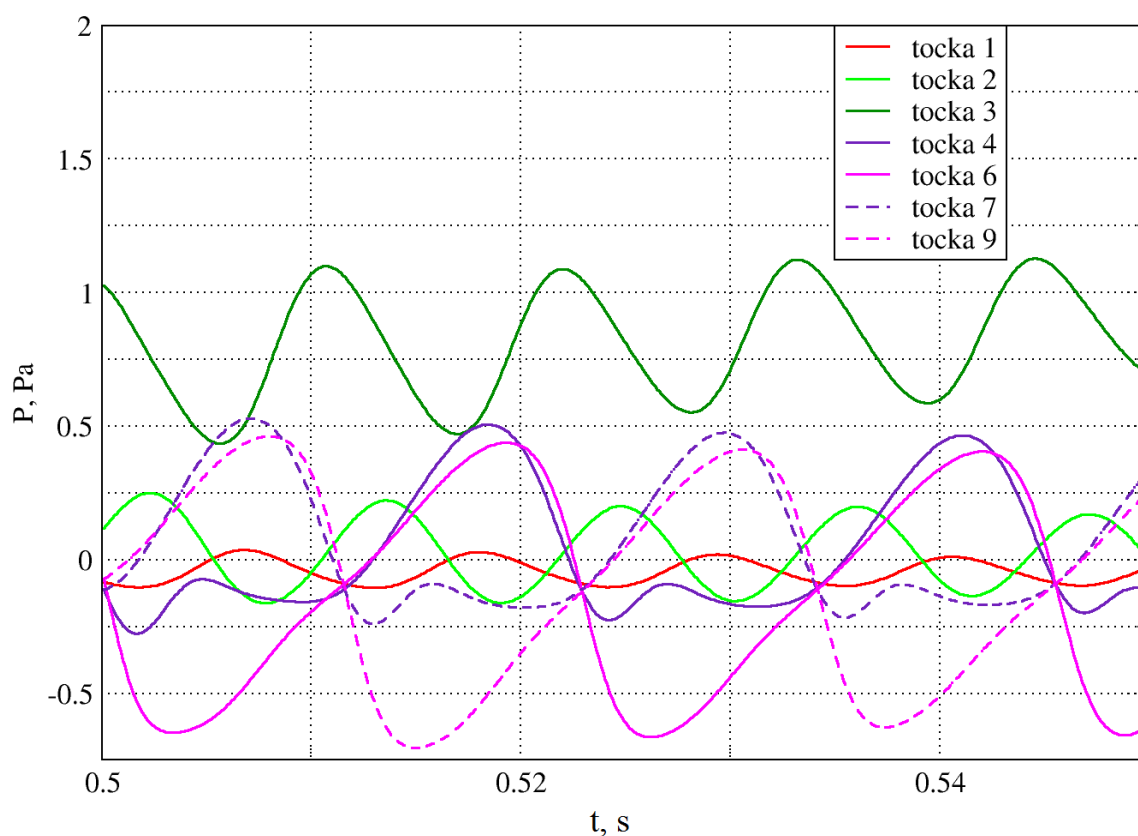
Slika 5.2 Nestacionarno polje brzine

5.1 Stacionarno rješenje

Koristeći računalni algoritam SIMPLE, nakon 25000 iteracija rješenja svih polja veličina su konvergirala do dovoljno malih reziduala (primjerice, konačni rezidual brzine je 10^{-5} m/s), što je bilo i za očekivati, budući da SIMPLE algoritam ne rješava tranzijentno strujanje. Konvergencija rezultata se još mnogo prije desila u području interesa (okolica vrha klina), što znači da su rezidulali u tom području još i manji.

5.2 Nestacionarna rješenja

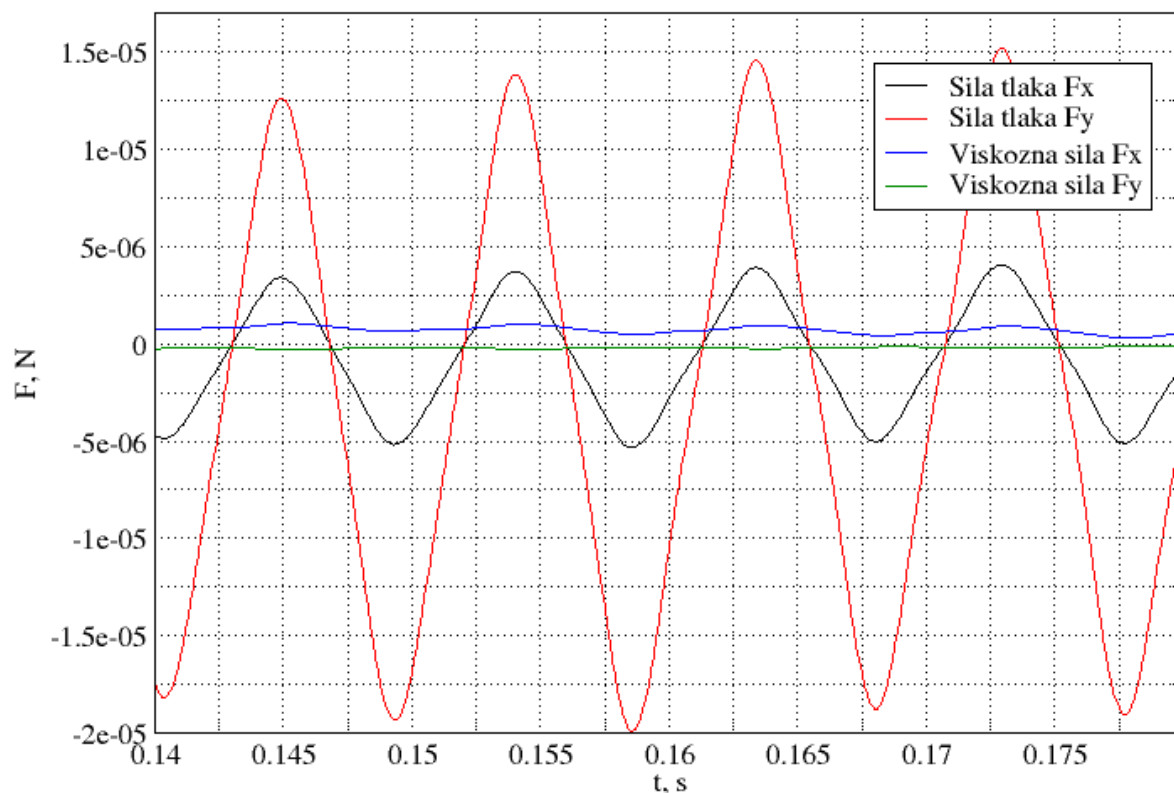
Kako bi se postigla nestacionarnost, odnosno osciliranje toka fluida, nije bilo potrebno poduzeti bilo kakve mjere u toj namjeri, već se nastacionarnost desila nakon određenog vremena (u svim slučajevima je to ispod 1 s). Ono što je primijećeno u svim proračunima, a što se i podudara s [1], je činjenica da frekvencija osciliranja tlaka nije ista u cijeloj domeni. U području između mlaznice i vrha klina se javlja dvostruko veća dominantna frekvencija, nego izvan tog područja. Također se primjećuje da, unatoč relativno maloj brzini od 3,1 m/s, postoji više frekvencija koje se ističu uz onu dominantnu, što je vidljivo na Slika 5.3.



Slika 5.3 Primjer osciliranja tlaka u više različitih točaka promatranja

Na dijagramu se vidi da u točkama 7 i 9 tlak oscilira jednom dominantnom frekvencijom uz utjecaj jedne ili više manje dominantnih frekvencija.

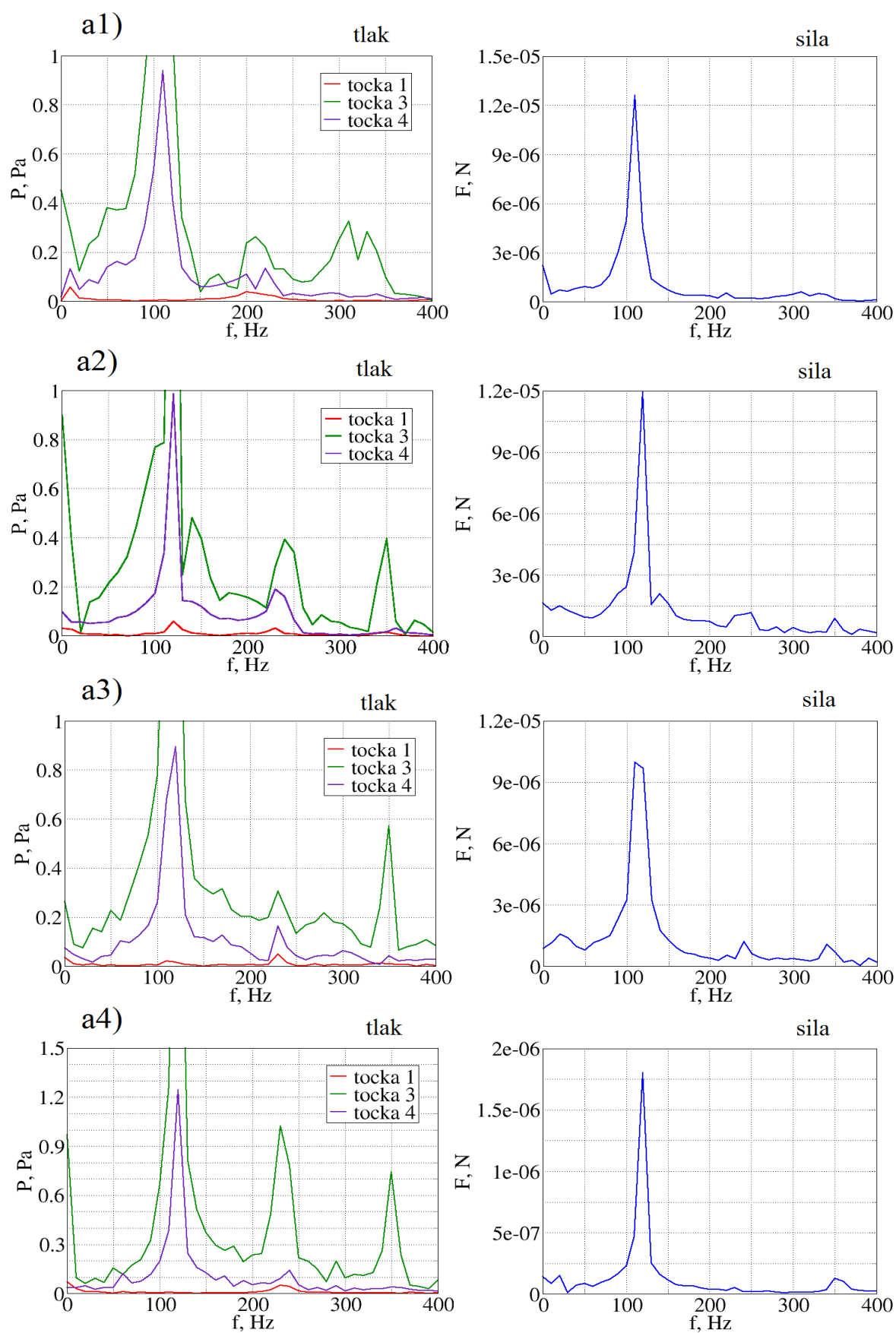
Što se tiče određivanja dominantne frekvencije, uzeta je vremenska promjena osciliranja sile na površinu klina jer je u ovom slučaju sila integralna veličina koja se odnosi na cijelu površinu klina te daje bolji globalni uvid u tranzijentnost pojave. Na Slika 5.4 je prikazana ovisnost sila tlaka te viskoznih sila u smjerovima osi x i y .



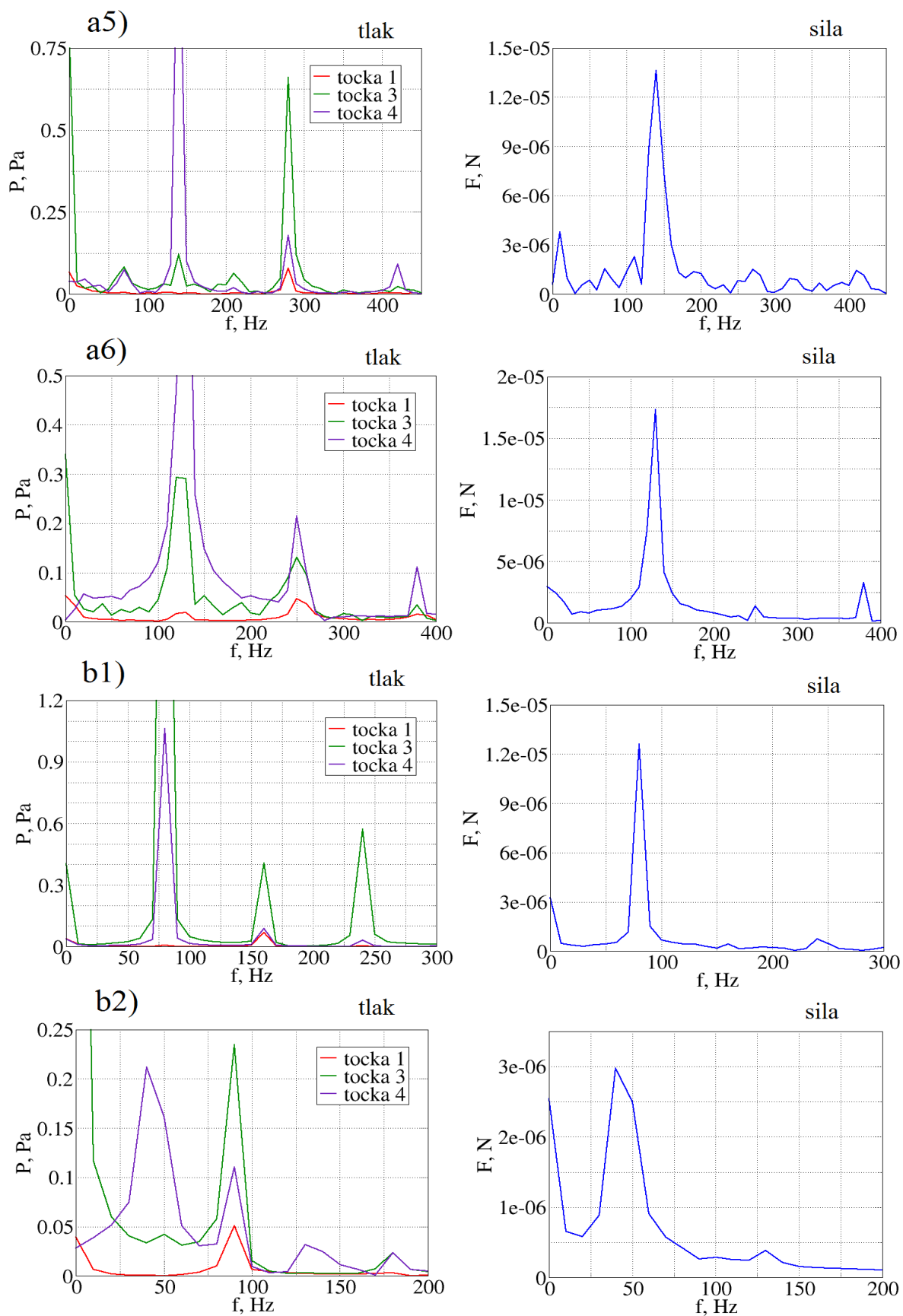
Slika 5.4 Prikaz sila tlaka i viskoznih sila u vremenskoj domeni

Ako se uspoređuju sile tlaka, očito je da je u svakom vremenskom trenutku sila u smjeru osi y $1/\tan(15^\circ)$ puta veća od sile u mjeru osi x zbog činjenice da je kut polovice vrha klina jednak 15° . Također se vidi da su viskozne sile jedan, odnosno dva reda veličine manje od sila tlaka te da se frekvencije svih veličina u grafu poklapaju. Zbog navedenih komentara, uzeta je jedna referentna veličina, u ovom slučaju sila tlaka u smjeru osi y , koja će u narednim analizama poslužiti za usporedbu s rezultatima tlaka.

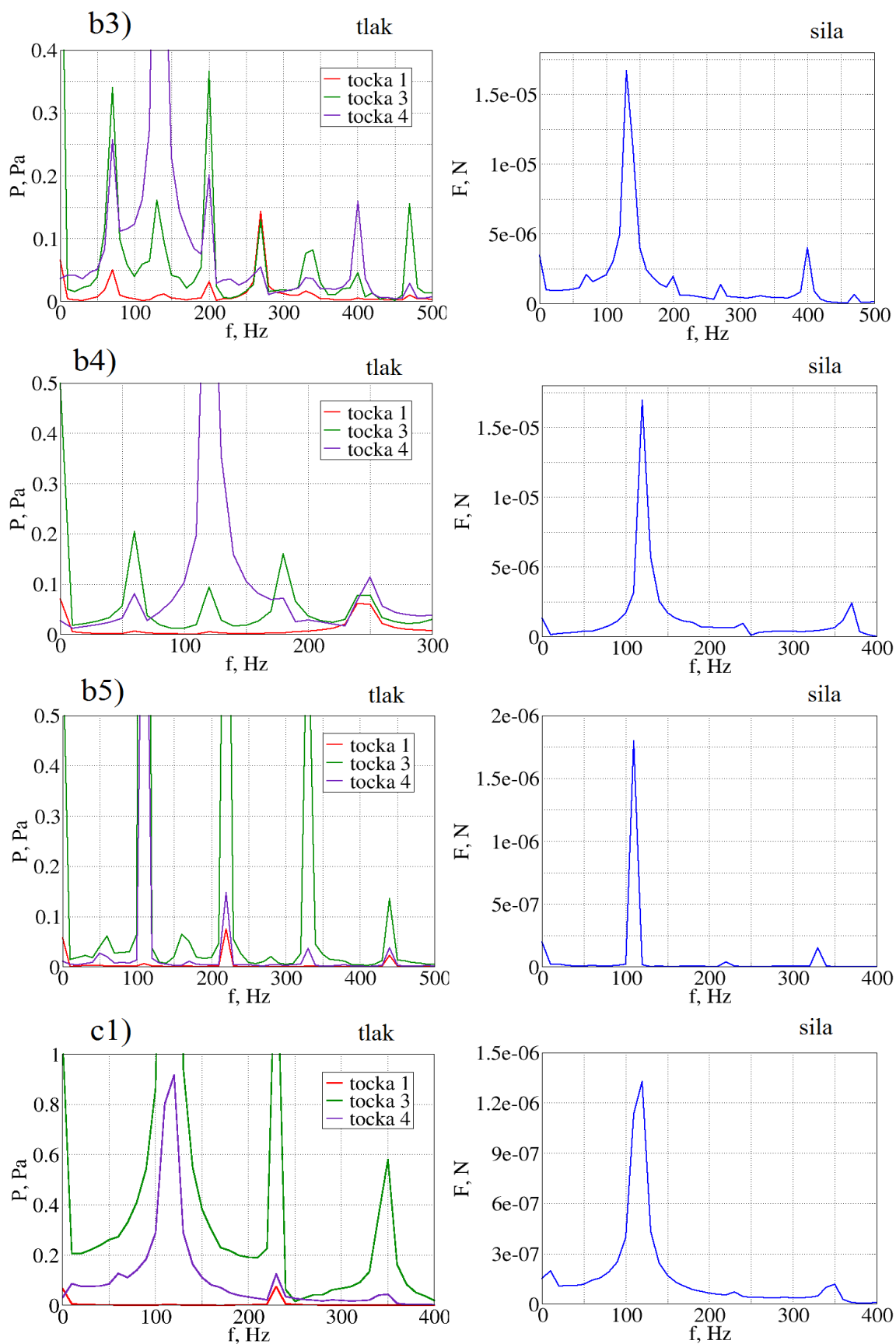
Na Slika 5.5, Slika 5.6, Slika 5.7 i Slika 5.8 su prikazani dijagrami svih provedenih simulacija, na kojima su prikazani grafovi kretanja amplitude tlaka te amplitude sile na površinu klina u smjeru osi y u ovisnosti o frekvenciji. Ti su dijagrami dobiveni diskretnom Fourierovom transformacijom iz istog vremenskog intervala, kako bi se dobiveni rezultati u frekvencijskoj domeni mogli uspoređivati. Na dijagramima s amplitudom tlaka se promatraju vrijednosti u tri točke domene.



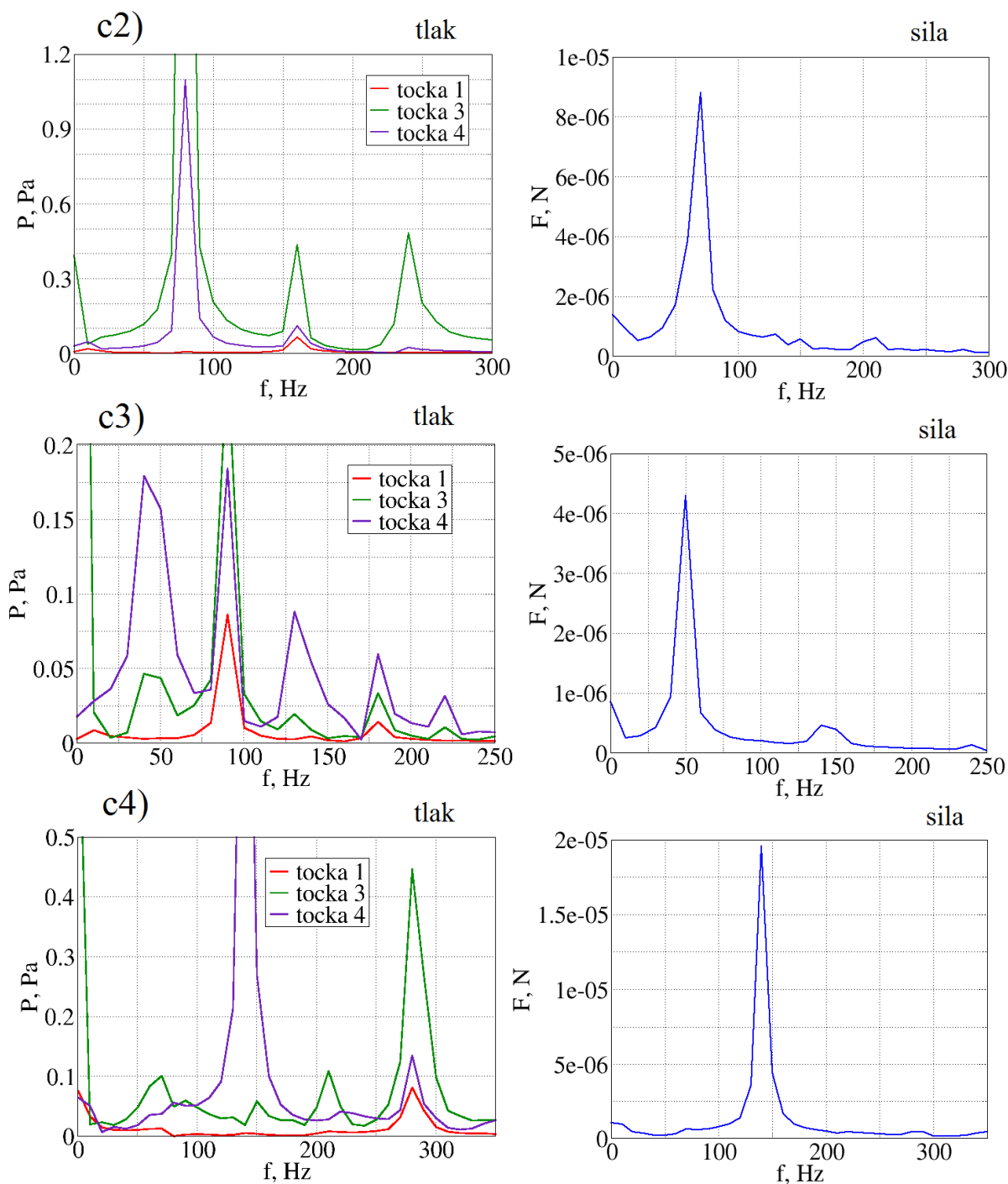
Slika 5.5 Dijagrami signala sile i tlaka za odabrane točke u frekvencijskoj domeni (1. dio)



Slika 5.6 Dijagrami signala sile i tlaka za odabrane točke u frekvencijskoj domeni (2. dio)



Slika 5.7 Dijagrami signala sile i tlaka za odabrane točke u frekvencijskoj domeni (3. dio)



Slika 5.8 Dijagrami signala sile i tlaka za odabrane točke u frekvencijskoj domeni (4. dio)

U većini gornjih dijagrama moguće je vidjeti 3 dominantne frekvencije: prva je većinom oko 100 Hz, druga između 200 i 300 Hz, a treća od 250 do 400 Hz. Činjenica da je raspon odgovarajućih frekvencija između različitih slučajeva simulacija prilično velik, daje razlog analiziranju i utvrđivanju točnosti tih simulacija.

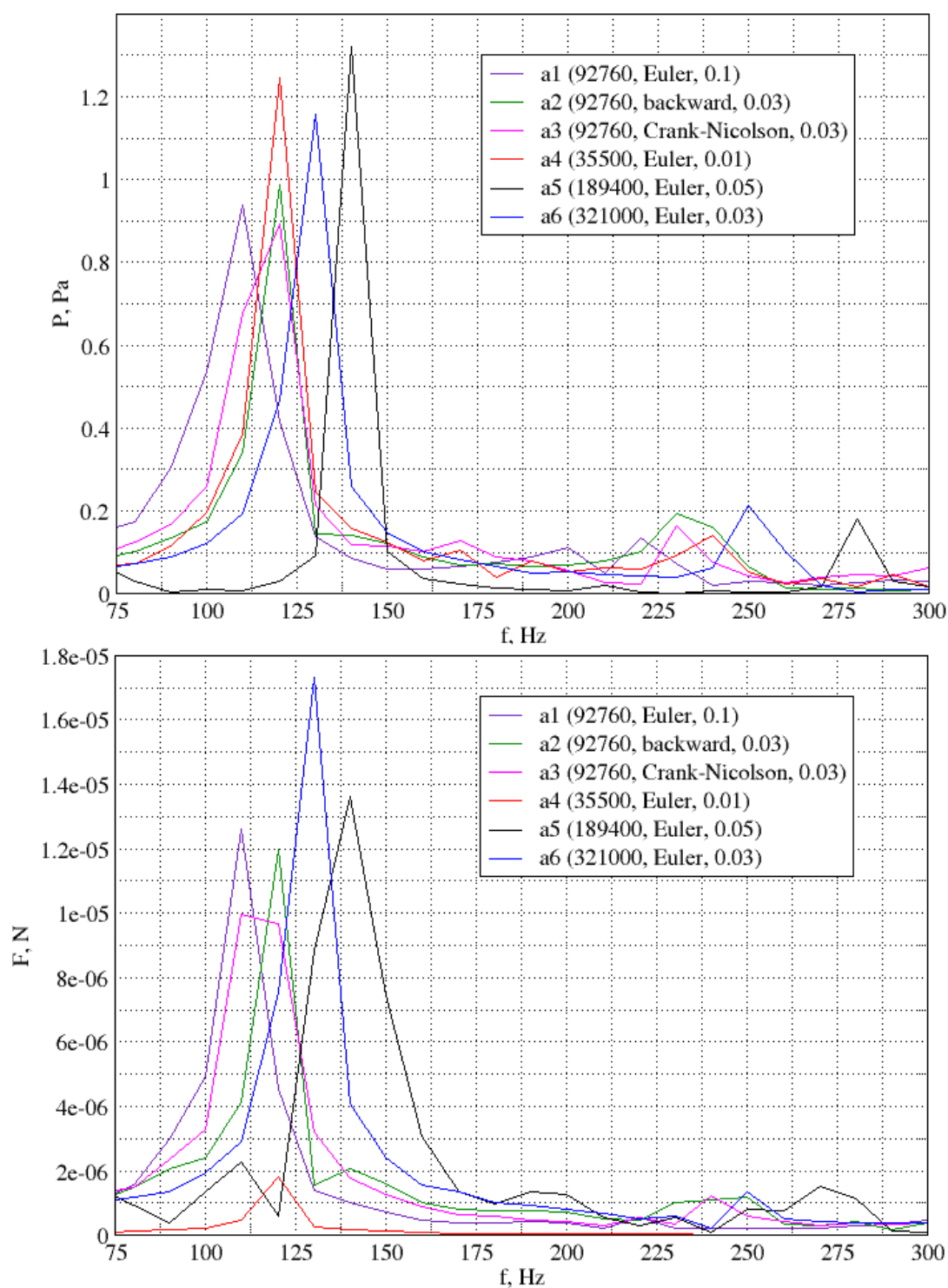
Budući da se radi o jednom milimetru debljine domene te o promjeni tlaka do svega 5 Pa, amplitude sile su prilično male (reda veličine 10^{-6} do 10^{-5} N). Frekvencija sile na površinu klina potvrđuje da je frekvencija osciliranja tlaka u točki 4 dominantna. Kako je ranije spomenuto, primjećena je dvostruka razlika u frekvencijama u području oko mlaznice i nakon vrha klina, no, također se primjećuje da se prijelaz iz više frekvencije u nižu dešava ili prije ili poslije nastrujavanja fluida na vrh klina, odnosno bilo između točkaka 1 i 3 ili 3 i 4. Slučaj da se taj prijelaz događa između točaka 1 i 3 se primjećuje u svim simulacijama s laminarnim modelom strujanja, osim u slučaju a5, gdje frekvencija u točki 3 ima istu dvostruku vrijednost, kao u točki 1. Također je prvi slučaj prijelaza frekvencije zabilježen u slučajevima b1 i b5 ($k - \varepsilon$ model) te u slučajevima c1 i c2 ($k - \omega$ SST model), dok se drugi slučaj primjećuje u proračunima b2 te c3 i c4. Primjećuje se da se za određenu točku pojavljuje više frekvencija koje su međusobno jednako razmaknute, od kojih je jedna dominantna. Druga vrijednost frekvencije je obično dvostruka prva. Postojanje više izraženih frekvencija, odnosno stadija je potvrđeno i u literaturi [1].

Ono što bi moglo biti zbunjujuće u gornjim dijagramima jest to da su određenim krivuljama „odrezani“ vrhovi zbog čega je otežano očitavanje dominantne frekvencije tlaka za određenu točku. Razlog tomu je činjenica da se krivulja aproksimira linearnom interpolacijom diskretnih vrijednosti koordinata točaka koje se nalaze na približno svakih 10 Hz, što unosi određenu pogrešku. Takve primjere daju dijagrami slučajeva b2 i c3 na krivuljama koje se odnose na točku 4. Budući da dijagram sile u svim slučajevima pokazuje jednu dominantnu frekvenciju, ona potvrđuje točnost očitavanja dominantnih frekvencija na „loše“ aproksimiranim krivuljama. S međusobnom udaljenosti točaka od 10 Hz je definirana apsolutna točnost rezultata frekvencija. Budući da se u radu ispituju akustične pojave u smislu analiziranja frekvencija, rezultati amplituda tlaka i sile nisu razmatrani.

Po pitanju prijelaza frekvencije, specifični slučajevi su b3 i b4 zbog toga što je u točki 3 izraženo više frekvencija koje su ekvidistantno raspoređene po apscisi. Sličan slučaj je i u slučaju b5, ali se može defonirati dominantna frekvencija, za razliku od slučajeva b3 i b4.

U idućim potpoglavljima dani su usporedni prikazi rezultata simulacija za određen kriterij po kojem se uspoređuje: u prva tri potpoglavlja po modelu strujanja, a u zadnja tri po broju kontrolnih volumena u mreži. Prvi dijagram prikazuje amplitudu tlaka u točki 4, a drugi amplitudu sile. U pripanim legendama, osim naziva slučaja, navodi se i mreža koja se koristi, shema vremenske diskretizacije u pojedinim slučajevima te duljina vremenskog koraka u milisekundama.

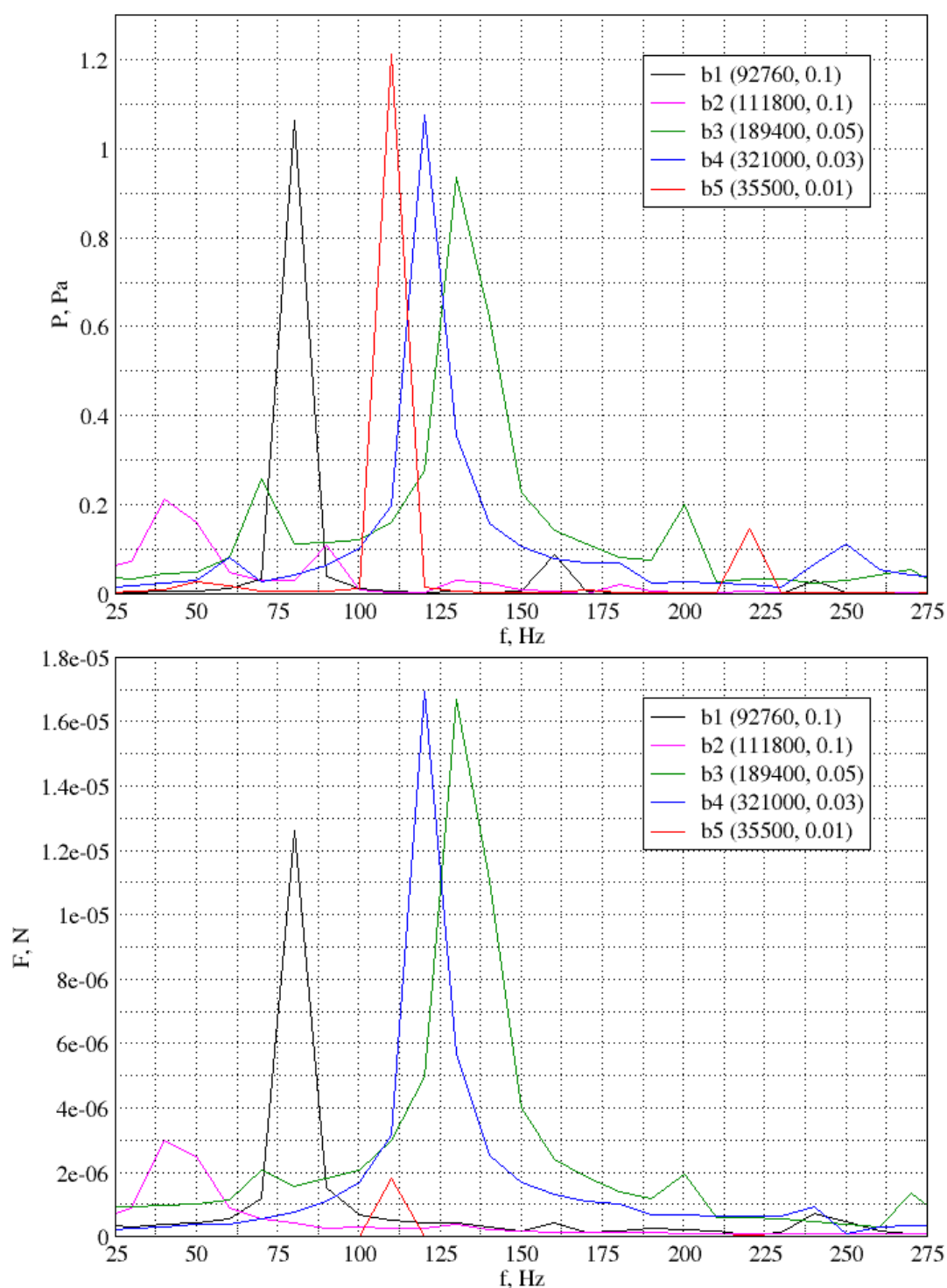
5.2.1 Usporedba rezultata laminarnih proračuna



Slika 5.9 Usporeba rezultata laminarnih proračuna

Vidljivo je da svi laminarni proračuni pokazuju dominante frekvencije u rasponu od 110 (a1) do 140 Hz (a5). Slučajevi a2 i a4 daju iste frekvencije (120 Hz), a a3 nešto nižu (odrezan vrh). Slučaj s najrafiniranijom mrežom daje frekvenciju od 130 Hz.

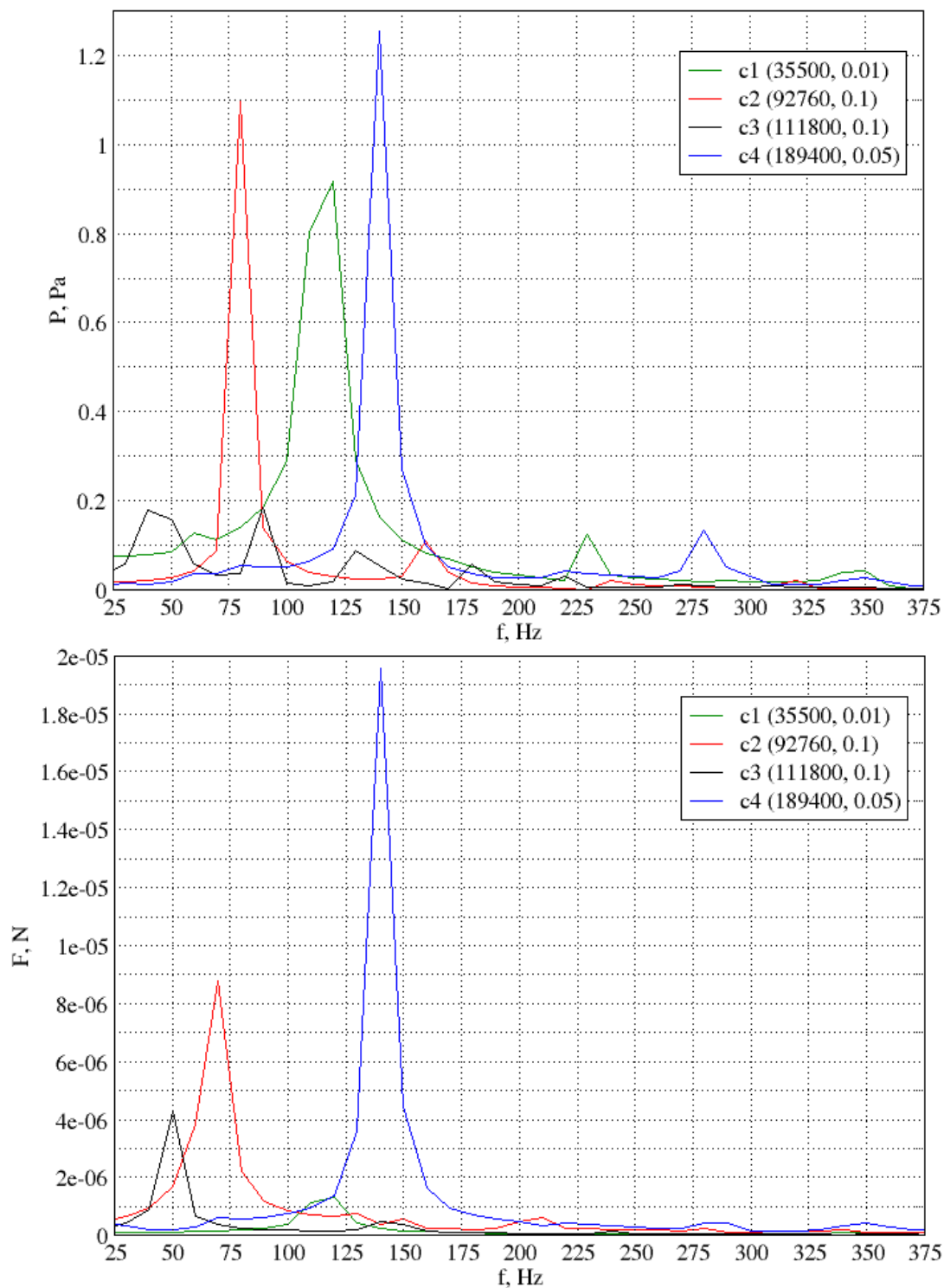
5.2.2 Usporedba rezultata proračuna $k-\varepsilon$ modela turbulencije



Slika 5.10 Usporedba rezultata proračuna s $k-\varepsilon$ modelom turbulencije

Raspon frekvencija je velik: od 45 (b2) do 130 Hz (b3). Ostale dominantne frekvencije su redom: 80 Hz (b1), 110 Hz (b5) te 120 Hz (b4).

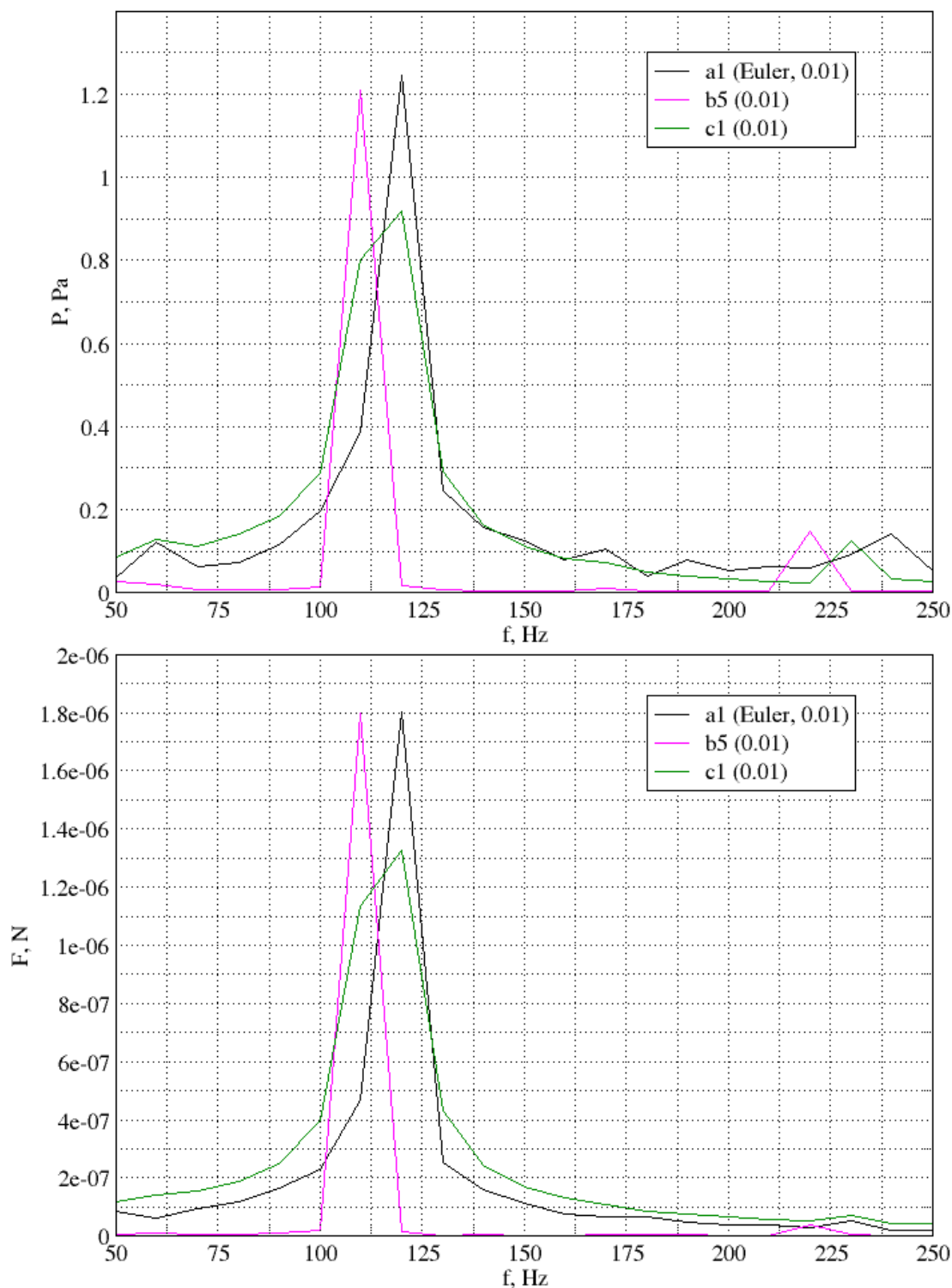
5.2.3 Usporedba rezultata proračuna $k-\omega$ SST modela turbulencije



Slika 5.11 Usporedba rezultata $k-\omega$ SST modela turbulencije

Slučaj s mrežom od 111800 volumena, kao i u proračunu s $k-\varepsilon$ modelom, daje najnižu frekvenciju. Nižu frekvenciju od prosjeka daje i slučaj c2. Najbliže prosjeku rezultat daje slučaj c1, sa 115 Hz i najrjeđom mrežom, a višu od prosjeka c4, sa 140 Hz i najgušćom mrežom.

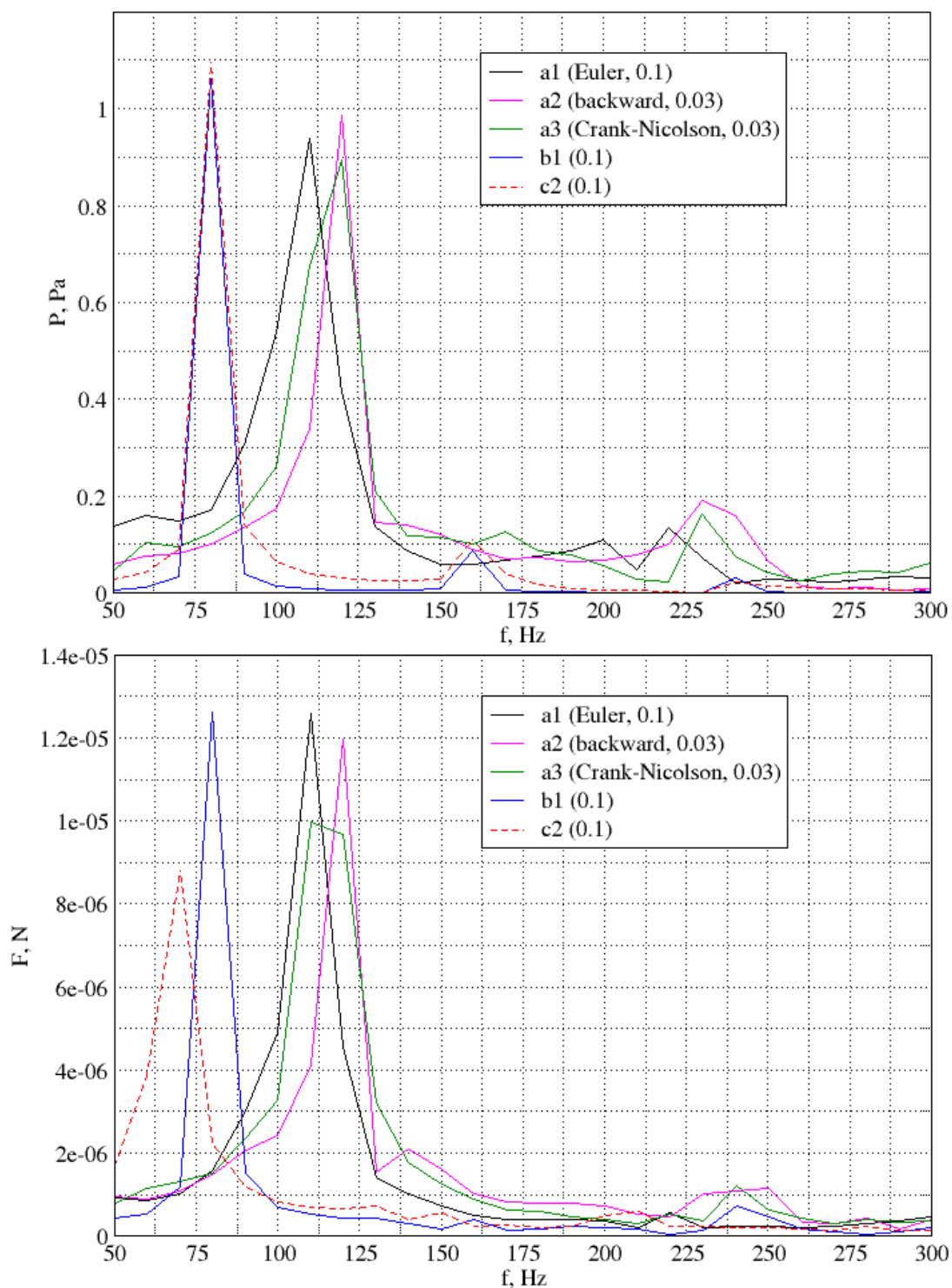
5.2.4 Usporedba rezultata proračuna na mreži s 35500 volumena



Slika 5.12 Usporedba rezultata proračuna na mreži s 35500 kontrolnih volumena

Sva tri proračuna su dobivena različitim modelom strujanja, a daju slične rezultate: a1 (laminaran model) daje 120 Hz, b5 ($k-\varepsilon$ model) 110 Hz, a c1 ($k-\omega$ SST model) daje frekvenciju od 115 Hz.

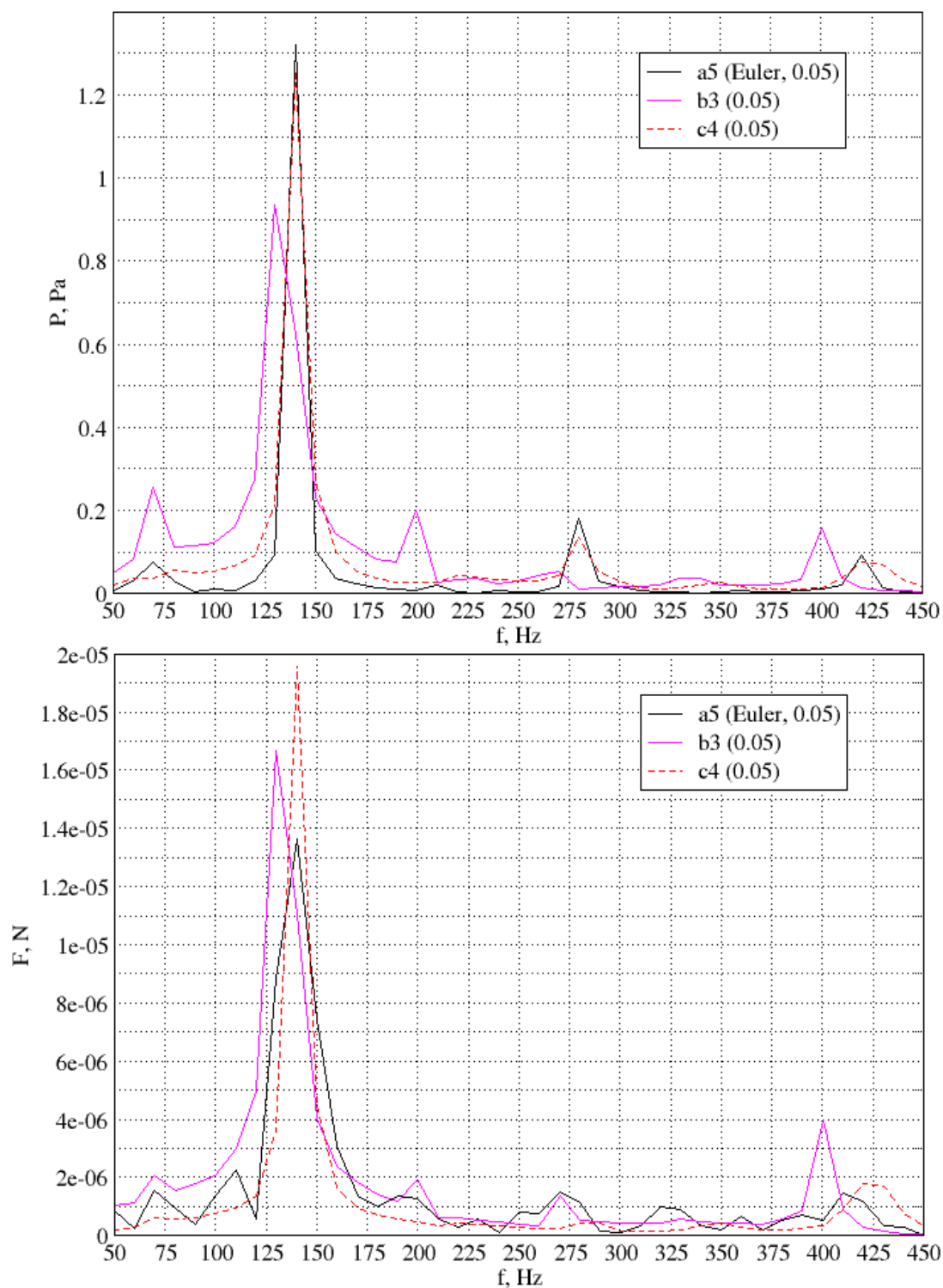
5.2.5 Usporedba rezultata proračuna na mreži s 92760 volumena



Slika 5.13 Usporedba rezultata proračuna na mreži s 92760 kontrolnih volumena

U slučajevima s najdužim vremenskim koracima (c2 i b1) su istaknute niže frekvencije (70 i 80 Hz). U preostala tri slučaja se vidi usporedba različitih shema vremenske diskretizacije na istoj mreži. Implicitna metoda prvog reda točnosti daje frekvenciju od 110 Hz (a1), a drugog reda točnosti 120 Hz. Shema Crank-Nicolson daje vrijednost od 115 Hz.

5.2.6 Usporedba rezultata proračuna na mreži s 189400 volumena



Slika 5.14 Usporedba rezultata proračuna na mreži s 189400 kontrolnih volumena

I u ovoj su usporedbi, kao i u potpoglavlju 5.2.4., dobiveni rezultati vrlo bliski, a proračuni su dobiveni različitim modelima strujanja. Slučajevi a5 i c4 daju istu frekvenciju od 140 Hz, a b3 oko 130 Hz. Obje su vrijednosti više od prosjeka.

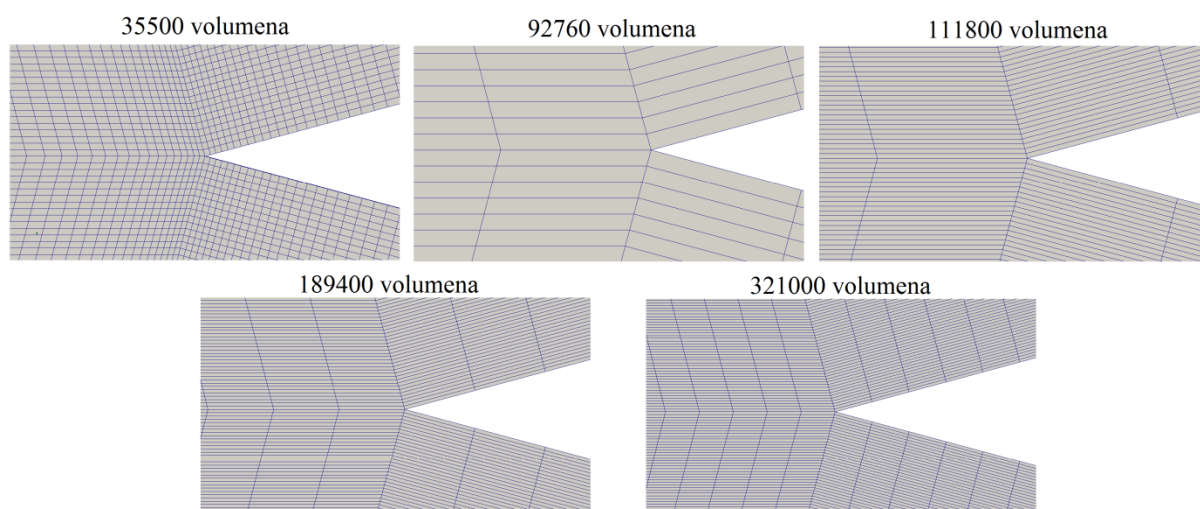
U Tablica 2 dane su vrijednosti frekvencija sile na površinu klina za sve provedene simulacije.

naziv slučaja	a1*	a2*	a3*	a4*	a5	a6	b1	b2
frekvencija, Hz	110	116	116	118	140	130	80	45
naziv slučaja	b3	b4*	b5*	c1*	c2	c3	c4	
frekvencija, Hz	130	121	110	115	70	50	140	

Tablica 2 Prikaz dobivenih frekvencija u svim proračunima

Napomena: Vrijednosti u tablici koje su označene s * su dobivene diskretnom Fourierovom transformacijom iz većeg vremenskog intervala (od 0,5 do 0,8 s trajanja intervala) kako bi se mogla odrediti točnija vrijednost frekvencije, odnosno kako bi aproksimacija krivulje u frekvencijskoj domeni bila bolja.

Ako se promatra odnos duljina stranica kontrolnih volumena u okolini vrha 2-D klina, primjećuje se razlika u svim mrežama. Na Slika 5.15 su prikazani detalji svih mreža korištenih u radu u približno jednakom mjerilu.



Slika 5.15 Prikaz djelova mreža u okolini vrha klina

Kako je u [1] u svim slučajevima bilo 32 kontrolna volumena između mlaznice i vrha klina, na mrežama od 92760 i 111800 je također stavljen isti broj volumena. Na mrežama 189400 i 321000 je stavljen 50, odnosno 100 volumena. Najmanji omjer duljina stranica je na mreži 35500, a najveći na mreži 111800. U svim slučajevima s mrežom od 35500 volumena se vidi dobro poklapanje rezultata, s frekvencijama od 110 do 118 Hz, dok na mreži 111800 rezultati najviše odstupaju, odnosno zabilježene su najmanje frekvencije od oko 45 Hz. Mreža 92760 ima

manji omjer duljina stranica volumena od mreže 111800 te za slučajeve s laminarnim modelom daje rezultate slične slučajevima s mrežom 35500, dok u slučajevima s modelom turbulencije daje niže frekvencije (oko 80 Hz). Zbog većih volumena u okolini klina na mreži 92760, vidi se i veće rasipanje rezultata. Na mrežama 189400 i 321000 je zadržan broj volumena u smjeru osi y oko vrha klina kao na mreži 111800, no smanjuje se broj volumena u smjeru osi x , što rezultira i smanjenjem omjera duljina stranica. Rezultati na mrežama 189400 i 321000 daju rezultate sličnije onima na mreži 35500.

5.2.7 Rezultat dobiven linearnom akustičnom teorijom

Proračuni koji su se vršili temeljem linearne akustične teorije nisu dali zadovoljavajuće rezultate. Vrtlozi su rezultat nelinearnosti u jednadžbama koje opisuju strujanje, a u linearnoj akustičnoj teoriji se pretpostavlja da se svaka veličina može zapisati kao suma osrednjene i pulsirajuće vrijednosti te da se nelinearni konvekcijski članovi mogu zamenariti, kako bi jednadžbe postale linearne. Budući da su vrtlozi generatori tlačnog (akustičnog) poremećaja, oni ne mogu biti opisani lineariziranim jednadžbama.

6 ZAKLJUČAK

U radu su izvršeno 16 uspješnih simulacija koje su u zadnjem poglavlju analizirane i međusobno uspoređene. U prvom dijelu analize, komentirani su stacionarni proračun te nestacionarni proračuni. U drugom dijelu su dane usporedbe signala tlaka i sile na tri različite točke unutar domene proračuna. U trećem pak dijelu se uspoređuju rezultati simulacija ovisno o određenom zajedničkom svojstvu proračuna (model strujanja, mreža).

Uzevši u obzir navedena razmatranja, autor pretpostavlja da iznos dominantne frekvencije koja će imati globalnog utjecaja na pojavu osciliranja toka uvelike ovisi o omjeru duljina stranica kontrolnih volumena u okolini vrha klina. U svim dijagramima postoji tendencija vrijednosti frekvencija onim rezultatima koji su dobiveni na mreži od 35500 volumena. Smanjenjem omjera duljina stranica volumena oko vrha klina iznosi frekvencija se kreću bilo od nižih vrijednosti (mreže 111800 i 92760) prema 115 Hz, bilo od viših vrijednosti (mreže 189400 i 321000) prema otprilike 115 Hz. Najveću toleranciju na omjer duljina stranica daju proračuni s laminarnim modelom, zbog čega su autori [1] i dobili dominantnu frekvenciju od 112 Hz, unatoč gruboj prostornoj diskretizaciji u glavnom smjeru strujanja te većim omjerima stranica volumena u okolini vrha klina. U konačnici, laminarni model strujanja daje najbolja poklapanja rješenja svih slučajeva te se smatra da je za brzinu od 3,1 m/s za ovu geometriju domene najbolje upotrebljavati laminarni model. Ključnu ulogu u iznosu frekvencije igrao je broj i oblik kontrolnih volumena u vlini vrha klina. Unatoč globalno najgrubljoj mreži od 35500 volumena, pripadni slučajevi su davali najbolje rezultate zbog najbolje uređenog dijela mreže na području gdje se generira osciliranje. Svi proračuni s tom mrežom su provedeni na najkraćem vremenskom koraku od 0,01 ms, što se također smatra ključnim za dobivanje vrlo sličnih rezultata za sve modele strujanja. Iz rezultata se zaključuje da simulacije s kombinacijom upotrebljenih mreža, veličine domene proračuna i brzine strujanja od 3,1 m/s daju najtočnija rješenja u laminarnom proračunu jer je gustoća mreža dovoljno velika da pokrije najmanje vrtloge koji se javljaju te nije potrebno koristiti model turbulencije.

Što se tiče budućih radova na ovom području, trebalo bi ispitati ponašanje modela turbulencije na višim brzinama strujanja, odnosno na višim Reynoldsovim brojevima. Autor smatra da bi u tim slučajevima modeli turbulencije davali točnije rezultate od ovih, a za više brzine strujanja i od laminarnog modela. Također bi trebalo ispitati odnos rezultata proračuna laminarnog modela i modela turbulencije u ovisnosti o duljini između mlaznice i vrha klina.

LITERATURA

- [1] G. Paál, I. Vaik, 2007. Unsteady phenomena in the edge tone, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 575-586
- [2] V. Vukčević, 2013. Primjena računalne dinamike fluida u analizi gibanja plovnih objekata, *Diplomski rad*
- [3] H. Jasak, 1996. *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London
- [4] D. C. Wilcox, 1993. *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, Inc., California
- [5] I. Džijan, *Računalna dinamika fluida, Podloge za predavanja*, Fakultet strojarstva i brodogradnje
- [6] Z. Virag, *Dinamika plinova, Podloge za predavanja*, Fakultet strojarstva i brodogradnje
- [7] B. Jeren, 2007. *Digitalna obradba signala*, Fakultet elektrotehnike i računarstva
- [8] <http://www.cfd-online.com/>, 2014.
- [9] <http://www.openfoam.org/>, 2014.
- [10] <http://www.wikipedia.org/>, 2014.